Bippo Levi, Tullio Viola

Intorno ad un ragionamento fondamentale nella teoria delle famiglie normali di funzioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.4, p. 197–203.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_4_197_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1933.

PICCOLE NOTE

Intorno ad un ragionamento fondamentale nella teoria delle famiglie normali di funzioni.

Nota di B. LEVI e T. VIOLA (a Bologna).

Sunto. - *La teoria delle famiglie normali appartiene al dominio deduttivo in cui è primo l'aggregato delle successioni convergenti di funzioni: a questo si riduce una apparente applicazione del postulato di* ZERMELO *rilevata da qualche autore.*

Per la dimostrazione di alcune proposizioni fondamentali della teoria delle famiglie normali, P. MONTEL (al quale si deve la nozione e le sue maggiori applicazioni metodologiche) ha fatto uso di una forma di ragionamento che può presentarsi come tipica applicazione del postulato delle infinite scelte nella forma di ZERMELO: *Se* $U = \{\mathfrak{M}\}$ *è un aggregato i cui elementi* $\mathfrak{M}$ *sono aggregati, esiste un aggregato* $M = \{m\}$ *i cui elementi* m *appartengono, uno per ciascuno, agli aggregati* $\mathfrak{M}$ (1).

L'osservazione fu fatta esplicitamente con intendimento critico (2): non tutti i matematici sono invero ugualmente disposti ad accettare il suddetto postulato, ed anche fra quelli che lo considerano come necessario, non sono pochi quelli che collocano per così dire in una gerarchia più bassa le proposizioni la cui dimostrazione non si può svincolare da esso. Senz'altro, noi personalmente ci poniamo nel primo gruppo, in quanto pensiamo che il postulato non sia accettabile senza riserve e conduca a proposizioni illusorie (fra le altre quella del buon-ordinamento). Tuttavia

(1) E. ZERMELO, *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann.* (« Mathematische Annalen », Bd. 59 (1904), pp. 514-516).

(2) Cfr. per es. S. MINETTI, *Su alcuni teoremi delle famiglie normali di funzioni analitiche anche in relazione al postulato di Zermelo.* (« Atti del Congresso internazionale di Zurigo », Settembre 1932, Bd. II, pp. 68-69).

il grado di evidenza e le applicazioni delle proposizioni analitiche cui abbiamo alluso consigliano, piuttosto che la critica negativa, un più profondo esame della dimostrazione nel senso di una sua possibile giustificazione. La conclusione sarà, a parer nostro, a favore di una veduta che, come teoria generale, abbiamo già ripetutamente esposta ed applicata [3].

1. Esponiamo anzitutto, in una forma leggermente generalizzata, il ragionamento in questione:

Si vuol dimostrare che una certa famiglia normale E di funzioni gode di una certa proprietà θ. Si definisce all'uopo una successione di classi di funzioni E_n ($n = 1, 2, \ldots$) tali che affermare θ equivalga ad affermare che le classi E_n di funzioni appartenenti ad E sono vuote da un n sufficientemente elevato in poi: tali inoltre che il supporre che una funzione $\Phi(z)$ di E sia limite di una successione uniformemente convergente di funzioni appartenenti a classi E_n di indici illimitatamente crescenti sia contraddittorio. Dopo ciò si ragiona per assurdo: se E non verificasse θ, esisterebbero classi E_n di funzioni di E, con indici elevati quanto si vuole; *dalla successione di queste* $\mathrm{E_n}$ *si potrebbe estrarre una successione di funzioni* $\mathrm{f_n}$, *una per ciascuna;* e, a causa della supposta normalità di E, da questa successione se ne potrebbe estrarre una parte uniformemente convergente; potendosi sempre supporre E chiuso, la funzione limite Φ appartiene ad esso, ed il fatto che la successione di funzioni che la definisce come limite abbia indici n elevati quanto si vuole è, per ipotesi, contraddittorio. Si conclude che è assurda l'ipotesi che E non soddisfi a θ.

ESEMPI. – 1°) Sotto condizioni variamente precisate il MONTEL stabilisce più di una volta che *in un certo dominio* (d) *una famiglia normale* E *è limitata nel suo insieme* [4]. Si assumono come classi E_n quelle delle $f(z)$ tali che $|f| \geq n$ in qualche punto di (d).

(3) B. LEVI, *Riflessioni sopra alcuni principî della teoria degli aggregati e delle funzioni* (in « Scritti matematici » offerti ad Enrico D'Ovidio. Torino, Bocca, 1918). e *Sui procedimenti transfiniti.* (« Mathematische Annalen », Bd. 90 (1923). pp. 164-173). T. VIOLA, *Riflessioni intorno ad alcune applicazioni del postulato di Zermelo e del principio di approssimazione di B. Levi nella teoria degli aggregati.* (« Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », vol. X (1931), pp. 287-294), e *Sul principio di approssimazione di B. Levi nella teoria della misura degli aggregati e in quella dell'integrale di Lebesgue.* (Ibid., vol. XI (1932), pp. 74-78).

(4) V. per es. P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications.* (Gauthier-Villars (1927), p. 35).

2°) *Se una famiglia normale* E, *in un dominio* (D), *non ammette nessuna funzione limite uguale alla costante* a, *il numero delle radici di* f(z) — a *contenute in un dominio* (D') *completamente interno a* (D) *è limitato per tutte le funzioni della famiglia* [5]. Si assumono come classi E_n quelle delle funzioni f tali che $f(z) - a$ ha almeno n radici in (D') [6].

2. Nella precedente enunciazione generale del procedimento dimostrativo si è posto in corsivo il punto essenziale in cui appare l'applicazione del postulato di ZERMELO (una seconda applicazione si potrebbe vedere nella estrazione dalla successione delle f_n di una successione parziale convergente uniformemente, ma la *possibilità* di effettuare tale estrazione *si può considerare inclusa* nella definizione medesima di classe normale: di fatto, in questa definizione medesima, avuto riguardo alle sue applicazioni, lo scrupolo di evitare il postulato della scelta non ha avuto alcun peso). Quale importanza deve darsi al rilievo?

La ragione principale per cui non ci pare accettabile il postulato di ZERMELO nella sua enunciazione più generale, è questa: che un ente matematico non si può considerare come definito, e quindi come esistente, se non è identificabile, a partire da un determinato gruppo (finito) di *idee primitive*, mediante un numero finito di operazioni. Segue allora che vi è buona ragione per considerare come soltanto *apparente* l'uso del postulato quando esso serva a stabilire un fatto *invariante* rispetto alle infinite scelte di cui è questione, nel quale quindi gli enti sui quali deve cadere la identificazione restano indipendenti dalle suddette scelte. In queste condizioni è il caso attuale: invero, sebbene la determinazione della funzione Φ dipenda effettivamente da infinite scelte, la conclusione (validità della proprietà θ) (già di per sè enunciabile senza riferimento alle infinite scelte) *deriva solo dalla possibilità di determinazione di una qualunque* Φ *e non dalla identificazione di una determinata funzione* Φ.

Pare tuttavia che questa considerazione, che potrebbe dirsi *qualitativa* e tenderebbe a distinguere casi in cui il postulato di ZERMELO sia applicabile da casi in cui non sia, non soddisfi — tale considerazione — alle abituali esigenze di precisione del ragionamento matematico; e lasci luogo ad un certo arbitrario dipendente dal gusto personale e dalla forma di esposizione. Effet-

[5] Loc. cit. alla nota [4], p. 36.

[6] Altri esempi vedi alle pp. 39, 88, 100, ecc. e in *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes.* (Id., (1933), pp. 92, 100, 119, ecc.).

tivamente la sostanza matematica di essa si trova in un altro ordine di vedute ([7]).

3. Abbiamo già osservato altrove ([8]) che la critica matematica non può essere completa se non si considera, per ciascuna teoria o proposizione, il *dominio deduttivo* nel quale se ne afferma la verità: e cioè non si assegnano gli aggregati (in numero finito) nei quali si suppone di potere effettuare la scelta arbitraria di elementi (in numero finito). Nulla impone (ed anzi resta abitualmente escluso) che la determinazione di ciascun elemento di questi *aggregati primi* sia caratterizzabile mediante un numero finito di elementi di altri aggregati presupposti: e cioè gli elementi di tali aggregati debbono pensarsi *definiti collettivamente* mediante determinate proprietà, ma *individualmente* fissati mediante atto di pensiero unico ed irriducibile ad altri più elementari.

La teoria delle famiglie normali di funzioni si svolge principalmente nel dominio deduttivo in cui si considera come aggregato primo quello delle *successioni di funzioni* (naturalmente resta sottinteso — ma per noi inessenziale — che qualche ulteriore limitazione può essere posta alle funzioni e alle loro successioni che si considerano: ad es. potrà intendersi per « funzioni » *funzioni analitiche, regolari, ecc. in un determinato campo*: e, fino ad un certo punto, potrebbero restringersi le « successioni » a *successioni convergenti* ed anche *uniformemente convergenti* (cfr. n. 4)). Il dire che una successione di funzioni si concepisce come individuo matematico senza alcuna maggiore determinazione che stabilisca analiticamente e calcolativamente la relazione fra il numero d'ordine e la corrispondente funzione nella successione, non differisce logicamente in nulla dal dire che ha senso la frase « sia a un numero reale » e cioè che si concepisce come individuo matematico (non maggiormente determinato) una sezione nell'aggregato dei numeri

([7]) Un elemento *quantitativo* al quale si potrebbe tentare di riferire il *sentimento di accettabilità* che accompagna questa ed altre applicazioni delle infinite scelte potrebbe essere il fatto che tali scelte si facciano soltanto una infinità numerabile di volte. Il considerare questo come *criterio di accettabilità* ci parrebbe ancora una decisione arbitraria, in mancanza di meglio, perchè non si corregge con esso il difetto di identificabilità di cui sopra si è parlato. Vi sono casi (ma non è fra questi l'attuale) in cui anche questa considerazione della numerabilità delle scelte si può *regolarizzare*, e sono quelli in cui essa possa completarsi mediante il nostro *principio di approssimazione*. V. i luoghi citati in ([3]).

([8]) B. Levi, ll. cc. in ([3]).

razionali (o una successione convergente di numeri razionali); e perciò non ha meno ragione di essere accolta come matematicamente rigorosa una teoria in cui ricorra la concezione globale di tali successioni che una in cui ricorra l'uso di numeri reali.

In questo dominio deduttivo si svolge completamente il ragionamento accennato al n. 1, senza che vi sia più caso a dubitare di applicazione del postulato delle scelte: definita la successione degli aggregati E_n, si *considera* (e non perciò si pretende di *definire*) una qualunque successione di funzioni f_n avente elementi in aggregati E_n di indice elevato quanto si vuole: la possibilità di estrarre da essa una successione parziale uniformemente convergente appartiene allora all'*ipotesi* della normalità della famiglia E.

4. Circa quest'ultimo passaggio si può tuttavia osservare che manca una qualsiasi regola per effettuare la citata estrazione: e che tale regola non possa darsi è nella natura della cosa, a causa della indeterminazione della successione delle f_n: effettivamente anche le possibili successioni parziali uniformemente convergenti contenute nella suddetta debbono considerarsi come intrinsecamente conosciute con questa. Pare allora conveniente di evitare questa scelta di secondo grado modificando leggermente la definizione delle famiglie normali col chiedere che *si dica normale una famiglia* E *quando, assegnata arbitrariamente una successione di aggregati* E_n ($n = 1, 2,...$) *di elementi di* E, *esistano successioni di funzioni uniformente convergenti cui appartengono elementi contenuti in* E_n *di indice elevato quanto si vuole.*

5. È importante di notare che l'estensione del dominio deduttivo mediante la considerazione delle « successioni di funzioni » è essenziale per le ricordate applicazioni della nozione di « famiglie normali » e non soltanto contingente alla forma dell'esposizione: invero, se, assegnata una famiglia di funzioni E, si dovessero di queste considerare soltanto successioni che si sappiano esplicitamente definire (in modo che sia identificabile con un numero finito di operazioni analitiche la funzione che occupa nella successione un posto i-mo arbitrariamente assegnato), mentre d'altra parte la distribuzione delle funzioni appartenenti a E in aggregati E_n avviene generalmente secondo regole che non hanno relazione colle ammesse definizioni delle successioni di funzioni, mancherà ogni criterio per giudicare a priori se fra le *definite* successioni ne esistano di quelle contenenti elementi di infiniti aggregati E_n, nè dalla mancanza di tali successioni si potrà concludere in nessun caso che gli aggregati E_n siano vuoti. In sostanza, sarebbe la definizione medesima di « famiglia normale » che risulterebbe indeterminata e cioè variabile insieme colla legge che si volesse assumere per la *definizione* delle successioni di funzioni; e, a seconda della scelta di questa definizione, le conclusioni cui si mira apparirebbero vere oppure false.

6. L'osservazione del n. 5 porta sopra il *valore metodologico* della nozione introdotta dal MONTEL: poichè infatti è principalmente metodologica l'origine di essa nozione, e l'applicazione essenziale si trova in proposizioni relative alla generale teoria delle funzioni, si deve concludere che, quando una di queste ultime proposizioni è dimostrata mediante la teoria delle famiglie normali, l'ottenerne una dimostrazione indipendente può essere considerato come un risultato nuovo, *non* perchè si vengano con ciò ad escludere le infinite scelte, *bensì* perchè si venga a restringere o a mutare il *dominio deduttivo* in cui la proposizione si afferma. Ed è ciò che avviene effettivamente in più di un caso. Così, ad es., osservando che la famiglia delle funzioni della forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

olomorfe e univalenti nel cerchio unità è normale, il MONTEL dimostra che esiste un cerchio di centro l'origine, completamente coperto dai valori di ogni funzione della famiglia: ma è chiaro che l'*enunciato* non dipende dalla considerazione di « successioni di funzioni »: e perciò, qualora la proposizione fosse stata dimostrata per la prima volta per questa via, sarebbe rimasto giustificato il problema di stabilire la proposizione *senza uscire dal dominio deduttivo dei numeri reali*, il dominio minimo in cui la proposizione è interpretabile. Nel caso presente, è proprio mediante ragionamenti svolgentisi in questo dominio minimo che la proposizione è stata dapprima trovata e successivamente precisata da HURWITZ, CARATHÉODORY, BIEBERBACH, FABER, LANDAU [9]. La differenza fra i due procedimenti dimostrativi è allora questa: che mentre la ricerca diretta, fondata sulla limitazione dei coefficienti di talune serie ben definite ed appoggiata, come si disse, al dominio deduttivo minimo in cui la proposizione è interpretabile, non manca di un certo grado di artificio e di laboriosità, ma

[9] HURWITZ, « Vierteljahrsschrift d. Nat. Gesell. », in Zürich, 1904; CARATHÉODORY, « Comptes rendus », 1907; BIEBERBACH, « Preuss. Akad. d. W. », 1916; LANDAU (cfr. anche per la bibliografia), *Ueber die Bloch'sche konstante*, ecc. « Math. Zeitschrift », Bd. 30, 1929.

è, nel caso presente, anche *costruttiva*, permettendo di calcolare valori assegnabili al raggio del cerchio affermato; invece il procedimento delle famiglie normali, appoggiato a un dominio deduttivo più ampio, risulta più rapido e più intuitivo, ma è necessariamente soltanto *esistenziale*.