Recensioni

* T. Bürklen: Mathematische Formelsammlung
* H. Falckenberg : Komplexe Reihen
* J. Rey Pastor: Teoría geométrica de la polaridad, en las figuras de primera y sequnda categoría
* E. Müller: Vorlesungen über darstellende Geometrie : II Band, Die Zyklographie
* J. Tropfcke: Geschichte der Elementar-Mathematik in sistematischer Darstellung. 2ter Band, Allgemeine Aritmetik
* Helmut Hasse: Höhere Algebra
* L. Bieberbach: Analytische Geometrie.
* E. Schrödinger: Mémoires sur la Mécanique ondulatoire
* E. Kamke: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie (Ettore Bortolotti, Bruno Tedeschi)
* Ludwig Bieberbach: Einleitung in die höhere Geometrie (B. Levi)
* George A. Campbell e Ronald M. Poster: Fourier Integrals for pratical applications (L. Fantappiè)
* G. Juvet: Leçons d'Analyse vectorielle (M. Manarini)
* B. Garnier: Cours de Mathématiques générales
* 8. Bochner: Umkehrsätze für allgemeine Limitierungsverfahren
* A. Hammerstein: Ueber die Approximation von Funktionen zweier komplexer Veränderlicher durch Polynome

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.3, p. 168–182.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_3_168_0>

RECENSIONI

O. T. Bürklen: *Mathematische Formelsammlung*, Sammlung Göschen, Bändchen 51; 2 Aufl. (Berlin, de Gruyter, 1931), pag. 256, prezzo Rm. 1,80.

Questa 2ª edizione, riveduta ed ampliata da F. Ringler, ha conservato il carattere di raccolta — sobriamente e chiaramente redatta — delle *formule* più importanti e dei principali *teoremi* di Matematica generale (approssimativamente quelli che s'incontrano nell'insegnamento matematico del nostro biennio propedeutico), dati senza alcun cenno di dimostrazione; da rilevarsi qualche perfezionamento e l'aggiunta del Calcolo vettoriale.

Gli argomenti trattati sono numerosissimi, e precisamente: *Aritmetica* e *Calcolo combinatorio, Algebra, Teoria dei numeri, Serie, Geometria piana, Stereometria, Trigonometria piana e sferica, Geografia matematica* ed *Astronomia, Geometria analitica nel piano e nello spazio, Calcolo differenziale ed integrale, Geometria differenziale, Equazioni differenziali, Analisi vettoriale.* Si suppongono note soltanto le nozioni e le formule più elementari; un indice alfabetico agevola la consultazione. Questo libriccino, nonostante qualche lieve imperfezione (¹), è da raccomandare come sunto a chiunque occorrano gli elementi delle Matematiche.

H. Falckenberg: *Komplexe Reihen*, Sammlung Göschen, Bändchen 1027 (Berlin, de Gruyter, 1931), pag. 140, prezzo Rm. 1,80.

Premessa una rapida esposizione delle nozioni e proprietà più salienti dei *numeri complessi*, delle *serie numeriche e di potenze* (nel campo complesso), e delle *successioni e serie di funzioni* (p. 1-28), vi è una numerosa raccolta di *problemi* interessanti su tali argomenti,

(¹) Ad esempio, negli enunciati dei teoremi di Pascal e di Brianchon dati a p. 71, non è detto chiaramente che gli esagoni ivi considerati debbono rispettivamente essere inscritti o circoscritti ad una conica; però gli enunciati stessi si ritrovano poi, sotto forma corretta, a p. 135.

considerati anche nel campo reale (p. 28-51), alla quale segue la relativa *risoluzione*, esposta sotto forma lucida e stringata (p. 51-137), ed un dettagliato indice alfabetico. Questo libretto raggiunge gli intenti didattici che si propone, e può fornire ai nostri studenti un utile materiale per Esercitazioni di Analisi.

J. Rey Pastor: *Teoría geométrica de la polaridad en las figuras de primera y segunda categoría* (Madrid, Talleres Voluntad, 1929), pag. VIII-294.

Quest'Opera — premiata dall'Accademia delle Scienze di Madrid nel 1912, e pubblicata solo nel 1929 — pur vincendo in modo brillante difficoltà non indifferenti, si può dire un po' lontana dalle correnti odierne della Geometria, in quanto ha la sua precipua ragion d'essere in una questione di metodo, da tempo superata; a prescinder da ciò essa può dirsi ben riuscita, e, sotto molti rispetti, interessante.

L'idea di fondare una teoria generale delle curve piane algebriche per via puramente *geometrica*, dovuta a Grassmann (1846), Steiner (1848), Chasles (1852) e Jonquières (1857), ha condotto il Cremona — in una Memoria fondamentale del 1862 — a compiere in tale indirizzo un passo importante, il quale però non realizza in modo completo la voluta indipendenza dall'Algebra. Tentativi notevoli in quest'ordine d'idee sono stati successivamente fatti da Thième (1878), Kötter (1886), De Paolis (1886) ed altri, senza tuttavia riuscire ad una rigorosa purezza di metodo.

Questo lavoro del Rey Pastor porta un sensibile perfezionamentu alle ricerche anteriori; e, se è vero che neppur qui si consegue l'auspicata indipendenza totale dall'Algebra, forse irrealizzabile, tuttavia si offre al lettore un quadro omogeneo di proprietà numerose ed eleganti, rielaborate sinteticamente. L'uniformità del metodo e l'aver voluto l'A. quasi nulla presupporre noto, appesantiscono talvolta l'esposizione; valgono però sovente ad alleggerirla, opportuni rinvii ed ingegnosi procedimenti.

L'Opera si divide in sei Capitoli. Nel Cap. I, premessi brevi richiami sulle nozioni fondamentali di *Geometria proiettiva* (compresa la teoria sintetica degli imaginari), vi è un cenno sulla teoria dell'*involuzione* d'ordine qualunque nelle forme di 1ª specie, sotto la forma sintetica dovuta al Kötter, che però notoriamente presta il fianco a serie obbiezioni. Poggiando su questi risultati, si giunge con processo ricorrente alla definizione sintetica di *curva piana algebrica* d'ordine n, C^n (ottenuta mediante un fascio di C^{n-1} ed un fascio di rette fra loro proiettivi), ed alle prime proprietà relative alle C^n, nonchè ai *fasci* e ad altri *sistemi* (lineari e non lineari) di C^n.

Il Cap. II tratta di alcune eleganti questioni connesse alla *polare di un punto rispetto ad un n–latero*; indi, sulla base della definizione sintetica generale — dovuta a G. KOHN — della polarità sulla retta, introduce le *polari* di un punto rispetto ad una C^n, e ne studia le prime proprietà (in relazione anche alle singolarità di C^n). Seguono lo studio dei *gruppi di punti coniugati, autopolari* od *apolari* rispetto a C^n, ed alcuni notevoli *teoremi* di LAGUERRE e di SERVAIS.

Nel Cap. III sono svolte le principali conseguenze che si hanno considerando la *polarità* in relazione ai *sistemi lineari di curve* (curve di un fascio con punto doppio, direttrice di una retta e di un fascio, curva dei contatti di due fasci, jacobiana, steineriana e cayleyana di una rete, ecc.). Nel successivo Cap. IV si esaminano più particolarmente i *sistemi* costituiti dalle varie polari dei punti del piano rispetto ad una C^n, con cenni sul *metodo di* THIÈME e derivazione delle *formule di* PLÜCKER. Gli sviluppi precedenti vengono applicati nel Cap. V allo studio delle proprietà fondamentali delle *cubiche piane* e di altre *curve speciali*.

L'ultimo Capitolo stabilisce — mediante la polarità — le principali *proprietà metriche delle curve* (centro, diametri, assi, asintoti, fuochi), tanto in Geometria euclidea che in Geometria non euclidea; esso si chiude con un paragrafo dedicato al *calcolo proiettivo* secondo STAUDT, e ad alcune *relazioni metriche* notevoli (come ad es. quelle che intercedono fra le curvature delle polari successive). Il libro termina con un'*Appendice*, nella quale vengono di nuovo rapidamente dimostrate per via analitica le più salienti proposizioni precedentemente stabilite, e con un'ampia, interessante ed accurata *Bibliografia*.

E. MÜLLER: *Vorlesungen über darstellende Geometrie*: II Band, *Die Zyklographie* (Leipzig u. Wien, Deuticke, 1929), pag. IX–476; III Band, *Konstruktive Behandlung der Regelflächen* (Leipzig u. Wien, Deuticke, 1931), pag. VIII–303.

Questi due pregevoli volumi delle « Lezioni » di E. MÜLLER compaiono — dopo la morte dell'A. — ad una certa distanza dal t. I (*Die linearen Abbildungen*, 1923), per cura di J. L. KRAMES, al quale sono dovuti alcuni risultati del t. III e l'ottimo coordinamento della materia; essi saranno seguiti da un IV ed ultimo volume, relativo alla *Konstruktive Behandlung der Schraub- und Schiebflächen*.

Il campo della Geometria descrittiva viene dall'A. allargato assai oltre i limiti consueti, in quanto egli fa in essa rientrare *ogni rappresentazione di carattere costruttivo*, senza esigere (nel t. II) che il disegno suggerisca anche solo approssimativamente all'intuizione l'oggetto rappresentato. I libri in esame, uniformandosi a tale criterio, comprendono varî sviluppi — in parte originali — sulla *Geometria dei cerchi di un piano* e sulle *superficie rigate dello spazio*, ricchi di contenuto geometrico e di notevole interesse teorico; accompagnati dallo svolgimenlo di numerose questioni, in cui predomina il lato costruttivo.

I due indirizzi teorico e pratico non son mai tenuti nettamente distinti, ciò che dà alla trattazione un'impronta particolarmente interessante, nonostante qualche lieve menda e l'eccessiva estensione che ne consegue per alcuni argomenti. Rilieviamo a questo proposito, che l'esposizione si sarebbe in varî punti meglio raccostata alla Geometria moderna e semplificata alquanto, introducendo qualche nozione basata su cognizioni un po' più elevate di quelle — piuttosto elementari — supposte nel lettore. Così, per esempio, si sarebbe opportunamente potuto dire delle classiche rappresentazioni iperspaziali dei cerchi orientati di un piano e delle rette dello spazio, rispettivamente coi punti di una quadrica di S_4 o di S_5; come pure — specie nel t. II — sarebbero state utili più frequenti considerazioni gruppali, e raccostamenti con diversi rami di Geometria; infine, nello studio — fatto nel t. III — delle rigate razionali del 3° e 4° ordine, si sarebbe potuto con vantaggio, anche agli effetti « costruttivi », considerare la loro rappresentazione birazionale su di un piano.

Entrambi i volumi riescono di facile lettura, scritti come sono in una forma piana, che palesa le spiccate qualità didattiche dell'A.; l'indirizzo è prevalentemente sintetico, ma non mancano qua e là opportune considerazioni analitiche. Assai nitide le figure, e numerosi i problemi svolti e da svolgere, alcuni dei quali potrebbero anche dar origine a ricerche ulteriori; le costruzioni indicate sono sempre condotte sino in fondo, e sovente lumeggiate da più punti di vista ([1]). Accurata ed abbondante la bibliografia, specialmente nel t. III; inoltre gli indici analitici, posti alla fine dei due volumi, ne rendono più agevole la consultazione.

Esponiamo rapidamente il contenuto dei libri in esame. Il t. II tratta essenzialmente della rappresentazione dei *punti* dello spazio

([1]) Ved. p. es. il *problema di* APOLLONIO del cerchio tangente a tre cerchi di un piano, trattato in guise differenti alle pp. 57, 79, 121 e 228 del t. II.

coi cerchi orientati o *cicli* di un piano, ottenuta associando al punto di coordinate cartesiane ortogonali (x, y, z), il ciclo del piano xy avente per centro il punto $(x, y, 0)$ e per raggio z (tenendo anche conto del segno). Questa *rappresentazione ciclografica*, già dettagliatamente studiata da W. FIEDLER, è stata approfondita assai dall'A., al quale si deve fra l'altro la considerazione metodica in questo argomento dei cerchi e delle linee *orientate*; essa può venir raccostata alla ben nota *proiezione minima* (di cui si son occupati CHASLES, MÖBIUS, CAYLEY, DARBOUX, LIE, ecc.), nella quale il ciclo suddetto corrisponde al punto (x, y, iz): ma ha su questa il vantaggio di mutare enti reali in enti reali, e quindi di potersi prestare alle *costruzioni grafiche*.

Premessa la rappresentazione ciclografica sul piano di *punti*, *rette* e *piani* dello spazio (Cap. I), si vede come in relazione ad essa giovi considerare sul piano all'infinito una conica C reale (di equazione $x^2+y^2-z^2=0$), la quale — assunta come assoluto — definisce nello spazio una *C–geometria* o *pseudogeometria* (studiata nel Cap. III), strettamente legata alla rappresentazione. Nel Cap. II trovansi considerate le imagini ciclografiche dei cerchi e delle sfere di questa pseudogeometria, denominati rispettivamente *C–cerchi* e *C–sfere*, e dedotte da esse le note *trasformazioni per direzioni reciproche* di LAGUERRE. Più in generale (Cap. III) le *C–similitudini* dello spazio, ossia le omografie che mutano in sè la C, dànno luogo sul piano al gruppo ∞^7 delle *trasformazioni* di LAGUERRE fra rette orientate. Seguono (Cap. IV) varie applicazioni, come il teorema di FEUERBACH, quelli sulle *successioni di circoli di* STEINER, la *rappresentazione* di BLASCHKE delle rette orientate di un piano sui punti di un cilindro rotondo, ecc..

Il Cap. V considera una *Geometria* dello spazio (analoga a quella non euclidea iperbolica di POINCARÉ, e della quale vien fatto uso in seguito), in cui i « piani » convenzionali son dati dalle C–sfere ortogonali ad un piano fisso. Vi è quindi uno studio dettagliato della rappresentazione ciclografica delle *curve sghembe* (Cap. VI), delle *flessioni* (nel senso di RIBAUCOUR) di una famiglia ∞^1 di cicli di un piano (Cap. VII), e della rappresentazione ciclografica delle *superficie* (Cap. VIII). Si hanno infine due Capitoli, dedicati rispettivamente alla rappresentazione dei *punti* dello spazio colle *sfere* che hanno per circoli massimi le relative imagini ciclografiche, ed alle questioni analoghe che si presentano in *due* dimensioni. Alcune generalizzazioni della rappresentazione ciclografica trovansi accennate in un'*Appendice*.

Il t. III offre un quadro notevole della teoria delle *superficie rigate* dello spazio. Esso si divide in due Parti. Nella 1ª, premesse le nozioni geometriche ed analitiche fondamentali, e la classificazione delle rigate in *sghembe* e *sviluppabili* (Cap. I), si passa ai varî modi di *generarle*, soffermandosi sulla *costruzione* di alcuni tipi di rigate e su questioni di carattere *algebrico* ad esse inerenti (Cap. II). Seguono (Cap. III) varie considerazioni generali di *Geometria differenziale* su di una rigata, come p. es. quelle relative alla variazione della *curvatura* lungo una generatrice, alle *equazioni naturali*, alla *classificazione delle generatrici* (in 16 tipi), alla *flessione* delle rigate. Infine vengon trattate (Cap. IV) altre questioni *algebriche* sulle rigate, relative alle *sviluppabili circoscritte* lungo le loro sezioni piane, ed a linee particolari tracciate su di esse, come i *contorni apparenti*, le *podarie*, le *linee di stringimento*, le *asintotiche*, ecc..

La 2ª Parte è dedicata alle rigate di 3° e 4° grado. Il Cap. V contiene la classificazione proiettiva ed affine e lo studio delle *rigate cubiche*, nonchè delle curve algebriche dei primi ordini che loro appartengono; seguono (Cap. VI) varie rigate cubiche metricamente particolari, fra le quali è specialmente da rilevare il *conoide* di PLÜCHER, di cui si dànno eleganti costruzioni e proprietà, e si determinano le asintotiche ed i contorni d'ombra. Nel VII ed ultimo Capitolo vi è la classificazione proiettiva (dovuta a R. STURM) delle *superficie rigate del 4° ordine* in 12 tipi, in relazione alle loro linee e sviluppabili multiple; si ha inoltre lo studio dal punto di vista metrico di rigate del 4° ordine notevoli, come p. es. il *cilindroide* e la superficie delle *normali ad una quadrica nei punti di una sezione piana*, e varie proprietà delle *rigate normali ad una superficie qualunque.*

BENIAMINO SEGRE

J. TROPFCKE: *Geschichte der Elementar-Mathematik in sistematischer Darstellung.* 2ter Band, *Allgemeine Aritmetik.* (3ª ediz., Berlino, Walter de Gruyter, 1933. RM. 12).

Ciò che scrissi in questo « Bollettino » (anno X, 1931, p. 37) a proposito del 1° Volume, mi esime dal ripetere le osservazioni allora fatte circa lo spirito, gli indirizzi e l'ordinamento di questo ottimo Trattato.

L'A. che da parecchi anni dedica ogni sua fatica alla riduzione a forma perfetta della sua opera, ha fatto tesoro delle notizie storiche che nel frattempo sono state pubblicate, e si è giovato dei consigli dei più diligenti cultori della materia. All'illustre storico H. WIELEITNER, che fu suo fedele ed attivo consigliere, vedo ora sostituiti degnamente i proff. KURT VOGEL, J. E. HOFMANN, che furono collaboratori di WIELEITNER, ed hanno buon nome nella storia della scienza.

Il presente volume tratta della *Aritmetica generale,* cioè della aritmetica dei numeri con segno, considerati specialmente nella loro rappresentazione simbolica letterale. Considera partitamente la *storia della introduzione e dello sviluppo del simbolismo aritmetico ed algebrico* e della *terminologia matematica,* delle *successive estensioni e dello sviluppo del concetto di numero,* delle *operazioni aritmetiche,* e segnatamente del *calcolo delle potenze,* dei *radicali aritmetici* e dei *logaritmi.*

Ho scorso il volume, che tratta uno degli argomenti che maggiormente interessano gli insegnanti di matematica elementare, e l'ho trovato perfettamente aggiornato. Senza alcuna riserva posso ripetere le lodi di compitezza, obbiettività di giudizio, larghezza di documentazione, che già ebbi ad esprimere per il 1° Volume. In questo, di circa 260 pagine, trovo non meno di 1460 citazioni, che possono essere accolte con piena fiducia, e che serviranno, sia a chi desideri più estesa trattazione di qualche particolare argomento, sia, come prezioso materiale di consultazione bibliografica, a chi si occupa di studi su la storia della matematica.

HELMUT HASSE: *Höhere Algebra.* (Berlin: Walter de Gruyter, 1933, RM. 1,62).

È il Volume 931 della « Sammlung Göschen », collezione che è rivolta a dare una esposizione breve, chiara, accessibile a tutti della odierna posizione della scienza nelle singole sue rappresentazioni.

Questo vuol essere il primo volume di una *Algebra superiore,* e contiene la *Teoria delle Equazioni lineari.*

Tratta nel 1° Capitolo dei Corpi numerici, nel 2° dei Gruppi di operazioni elementari, nel 3° dell'Algebra delle equazioni lineari (Lineare Algebra), indipendentemente dalla teoria dei determinanti. Nel 4° ed ultimo, dei gruppi simmetrico ed alterno di sostituzioni, dei determinanti, e della applicazione dei determinanti alla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.

L. BIEBERBACH: *Analytische Geometrie.* (Zweite Auflage, (1932). Band. 29, Teubners Mathematische Leitfaden).

La richiesta di una seconda edizione, a men di due anni dalla prima, è la prova più evidente dell'accoglienza che appresso gli studiosi ed i maestri ha avuto questo elegante volumetto, chiaro per profondità di idee, originalità di vedute e di tecnica, perspicuità e rigore di esposizione. Non riscontro, nell'insieme, differenza sensibile fra le due edizioni, e rimando perciò, per l'analisi dell'opera, alla recensione della prima edizione, pubblicata a p. 110 del vol. IX di questo « Bollettino ».

E. SCHRÖDINGER: *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire.* Avant-Propos et notes inédites de l'Auteur. Préface de M. BRILLOUIN. Traduit par AL. PROCA. (Paris, F. Alcan, 1933, Fr. 50).

Le Memorie ormai classiche dello SCHRÖDINGER, raccolte in un volume nel 1926 e collegate con una dettagliata tavola Analitica, destinata a segnare la successiva evoluzione delle idee, che progressivamente erano germogliate nella mente dell'Autore, vengono ora, a cura della « *Union Française*, Comité pour l'Expansion du livre scientifique », presentate con impeccabile forma tipografica, nella traduzione francese del dott. PROCA.

L'A. ha controllato la traduzione, e l'ha arricchita di interessanti note ed aggiunte, scritte espressamente per questa edizione.

I Capitoli che compongono il volume trattano rispettivamente dei seguenti argomenti:

Quantificazione e valori proprî (1^a e 2^a comunicazione). - Il passaggio continuo dalla micromeccanica alla meccanica macroscopica. - Sui rapporti che esistono fra la meccanica quantistica di HEISENBERG-BORN-JORDAN e quella dell'Autore. - Quantificazione e valori proprî (3^a e 4^a comunicazione). - Su l'effetto COMPTON. - Il teorema della conservazione della energia e della quantità di moto per le onde materiali. - Scambi di energia secondo la meccanica ondulatoria.

E. KAMKE: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie.* (S. Hirzel in Leipzig, 1932, RM. 10).

Per introdurre la definizione matematica di *probabilità*, l'A. calcola il numero H_n delle volte in cui il numero 3 si presenta quando per n volte successive si getta un dado, osserva che il rapporto H_n/n (frequenza relativa) col crescere di n va oscillando intorno al numero 1/6 e che le oscillazioni vanno sensibilmente diminuendo col crescere di n. Da ciò conclude col *trovare plausibile* la deduzione $\lim\limits_{n \to \infty} H_n/n = \frac{1}{6}$. Di qui la definizione di *probabilità matematica* di un fatto aspettato come il *limite della frequenza relativa* H_n/n quando il numero delle prove tende all'infinito.

Distingue, in un primo momento, i casi in cui si ha probabilità matematica in senso stretto (*Innermathematische Beispiele*), nei quali si può effettivamente dimostrare la esistenza del limite, da quelli in cui la esistenza del limite si considera solo come plausibile (*Aussermathematische Beispiele*); ma nel seguito non tiene conto di tale distinzione.

Il libro è diviso in due parti. La prima studia *le leggi di composizione della probabilità* per *addizione*, per *divisione*, per *prodotto* e ne dà molteplici applicazioni, poi tratta del *valor medio* e della *dispersione*.

Nella seconda parte si considera un *campo di probabilità* (*Warscheinlichkeitsfelder*), cioè una varietà doppiamente infinita di eventi, ordinati in un quadro a doppia entrata (in una matrice con infinite linee ed infinite colonne) in relazione con uno o più, fatti aspettati. Dopo aver dato condizioni per la esistenza di tali campi, si distinguono due speciali modi di composizione per prodotto della probabilità in tali campi: poi si considera quel particolare campo (*Bernouillische Warscheinlichkeitsfelder*) nel quale le successioni delle diverse linee presentano tutte la stessa probabilità per un medesimo fatto aspettato, e ad un tal campo si estendono la legge di BERNOUILLI e le formule di STIRLING, di LAPLACE e di POISSON.

In un successivo paragrafo si considerano *successioni di probabilità*, dette di BERNOUILLI, nelle quali la successione primitiva C_n si immagina scissa in k successioni fra loro incongrue *modulo* k, della forma cioè C_{nk+r}, ciascuna delle quali è composta con gli eventi i cui indici sono congrui fra loro *modulo* k. Si studiano le proprietà di tali successioni, e si applicano ad esse la legge di BERNOUILLI e le formule di LAPLACE e di POISSON.

Il paragrafo seguente è dedicato allo studio della *legge dei grandi numeri*, e l'ultimo alla *teoria della dispersione* di LEXIS.

ETTORE BORTOLOTTI

Il presente libro tratta della teoria della probabilità, cioè dei fondamenti del calcolo della probabilità, a base dei quali si pongono assiomi di cui si dimostra, di volta in volta, la compatibilità e l'indipendenza. L'A. basa la sua teoria sulla nota definizione della probabilità data dal MISES estendendola non soltanto ai « collettivi » (cioè alla successione di eventi caratterizzati dall'invarianza della probabilità rispetto alla « libera scelta dei posti »), ma anche a successioni sottoposte a condizioni meno restrittive. Tale modo di trattare l'argomento deriva da una scuola di giovani matematici (COPELAND, TORNIER, DÖRGE, KAMKE) che non ritengono sufficientemente fondata la teoria dei collettivi perchè non si è ancora riusciti a dimostrarne in via costruttiva l'esistenza. Il programma è esplicitamente limitato alle probabilità discrete.

Nella prima parte del libro l'A. sviluppa i teoremi che sono validi per le « sequenze di eventi » nel senso più generale, mentre nella seconda parte espone quelli per cui è necessasio di restringere l'ambito delle considerazioni ai gruppi di sequenze che il TORNIER chiamò « campi di sequenze con probabilità ».

Dopo le definizioni fondamentali ed alcune applicazioni più semplici, sia di carattere matematico che pratico, l'A. passa direttamente alle così dette regole dell'addizione, del quoziente e del prodotto. Esse si identificano coi principi classici nel caso di una « suddivisione eguale » cioè se ai singoli caratteri dell'evento considerato spettano probabilità uguali. Caratteristici sono i teoremi che riguardano le disuguaglianze di probabilità. Interessanti le considerazioni storiche e la chiara e significativa esemplificazione. Speciale rilievo è dato alla regola del prodotto che è esposta in varie forme. È un pregio precipuo del libro l'esattezza delle definizioni e l'enunciazione precisa di alcuni concetti (p. e. quello di indipendenza degli eventi, che è data in una forma già proposta da HAUSDORFF) di cui si sente la mancanza perfino in alcuni libri classici. Seguono anche qui applicazioni interessantissime, alcune delle quali già note, ma trattate in maniera nuova. Fra quelle di carattere matematico notiamo la ricerca della probabilità del comparire di una data cifra in un prefissato posto decimale di una radice o di un logaritmo. Fra quelli di carattere pratico notiamo un problema sulle iterazioni, uno riguardante la probabilità di vincere un gioco in relazione all'abilità dei giocatori ed alcune osservazioni sulla legge di MENDEL. Segue, in breve, la critica della « probabilità delle cause » ben nota ai lettori italiani. Nell'ultimo paragrafo della prima parte si adattano alle nuove teorie le definizioni ed i teoremi riguardanti i valori medi, la dispersione ed il rischio ed è data, insieme alle soluzioni di altri problemi, anche quella rigorosa del vessato problema di Pietroburgo.

La seconda parte è di carattere prevalentemente astratto, abbondano i teoremi d'esistenza e le costruzioni teoriche. Le definizioni riflettono alcune restrizioni del concetto di sequenze con probabilità. Si dimostra in ispecie la compatibilità dei singoli assiomi costruendo sequenze di data « suddivisione di probabilità » e campi di probabilità di tipo generalissimo. Per questi ultimi si dimostrano nuove regole di prodotto e si dà una risoluzione corretta di un classico problema di TCHEBYCEFF. In seguito si considerano quei teoremi che fanno capo alla legge di BERNOULLI. Si rende necessaria una nuova restrizione del concetto delle successioni di probabilità e si giunge così a quelle chiamate dall'A. Bernoulliane. Segue col solito rigore la dimostrazione dei classici teoremi con alcune osservazioni e generalizzazione di grande interesse ed altre riguardanti il valore filosofico delle probabilità. Gli ultimi paragrafi sono dedicati ad alcuni teoremi generali su campi di probabilità più complessi ed alla dimostrazione del teorema che fu chiamato dal MISES « il primo teorema fondamentale della probabilità ».

Corona il lavoro una bellissima esposizione della teoria della dispersione del LEXIS.

I meriti di questo libro sono, oltre ai pregi teorici già esposti che rendono il lavoro interessante anche ai puristi, la chiarezza di esposizione degli argomenti anche non facili, l'esemplificazione semplice, varia, caratteristica e talora non priva di un certo spirito, e la concisione.

BRUNO TEDESCHI

LUDWIG BIEBERBACH: *Einleitung in die höhere Geometrie.* « Teubners Mathematische Leitfaden », Bd. 39, Leipzig und Berlin, 1933, (p. 128+VIII, in 8°, RM. 6,40).

Il BIEBERBACH arricchisce la serie dei suoi volumetti di Geometria (projettiva, analitica, differenziale) con questo nuovo, indirizzato principalmente verso lo studio dei « fondamenti ». Esso si ricollega particolarmente ai primi due ricordati e rappresenta, almeno in confronto colle consuetudini nostre, una interpretazione meno comune o piuttosto molto particolare del termine « geometria superiore ». A parte ciò, esso è notevole come un richiamo a un ordine di vedute che ebbe maggiormente interesse scientifico alcuni decenni addietro, ma che è bene non sfugga alla cultura dei giovani: la veduta assiomatica, quella gruppale–invariantiva (programma di Erlangen), l'interpretabilità delle nozioni geometriche (*Uebertragungsprinzip*). Nel Cap. I, che riguarda l'Assiomatica, l'A. studia i problemi della compatibilità, indipendenza, completezza del sistema dei postulati geometrici, mediante l'aritmetica desarguiana, introdotta sulle tracce dell'HILBERT: interessante a questo riguardo, l'osservazione che la proprietà commutativa del prodotto si può, con qualche vantaggio di simmetria, far risultare ammettendo, invece del teorema di PASCAL, quello di DESARGUES sul quadrangolo costruttore di tre coppie in involuzione. Seguono 4 Capitoli in cui si applica il *principio di trasporto* alla interpretazione dei gruppi di trasformazioni projettive, in spazii di dimensioni ≤ 5, nella geometria delle coppie di punti sulla retta (HESSE), nella geometria dei cerchi del piano (MÖEBIUS, LAGUERRE, LIE), in quella delle rette dello spazio. Un ultimo Capitolo tratta delle metriche projettive.

Come generalmente nei trattati del BIEBERBACH, è da rilevare in questo la ricchezza e la varietà delle idee che inducono il lettore a pensare ed allargano il campo della sua cultura matematica molto al di là di quello che è l'argomento e l'occasione del libro.

B. LEVI

GEORGE A. CAMPBELL e RONALD M. FOSTER: *Fourier Integrals for pratical applications.* Bell Telephone System, Technical Publications, Monograph B - 584 (Bell Tel. - Laboratories, 463 West Street, New York, settembre 1931), pp. 177.

È una interessante raccolta di espressioni per il calcolo effettivo della trasformazione funzionale (trasformazione di LAPLACE o integrale di FOURIER)

$$G(g) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{2\pi i f g}\, df \tag{1}$$

e della sua inversa

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} G(g) e^{-2\pi i f g}\, dg, \tag{2}$$

che, data l'importanza di queste trasformazioni in molti problemi di fisica matematica ed applicata (equazioni a derivate parziali del calore, dei telegrafisti, ecc.), può riuscire di grande utilità per calcolare sotto forma finita le soluzioni cercate.

Dal punto di vista teorico, è da segnalarsi particolarmente, poichè costituisce forse il primo esempio di una tabella per il calcolo pratico di una data trasformazione funzionale; in essa, infatti, sono riportate su due colonne, l'una accanto all'altra, moltissime coppie (circa un centinaio) di funzioni $F(f)$ (1ª colonna) e $G(g)$ (2ª colonna) corrispondentisi tra loro per le trasformazioni (1), (2), così come nelle comuni tavole per il calcolo delle funzioni elementari ($y = \log x$, $y = \log \operatorname{sen} x$, ecc.) si riportano su due colonne i valori numerici della variabile indipendente x, e i corrispondenti valori della variabile dipendente y.

In fine al libro si trova poi la soluzione esplicita di molti problemi di elettrotecnica, nel caso di funzioni sinusoidali (correnti alternate); al qual caso ci si può sempre ridurre con le trasformazioni (1), (2).

L. FANTAPPIÈ

G. Juvet: *Leçons d'Analyse vectorielle.* Premier Partie: « Géométrie différentielle des courbes et des surfaces. Théorie mathématique des champs ». Rouge, Lausanne 1933, pp. 120.

Questi elementi di calcolo ed analisi vettoriale con applicazioni geometriche alla teoria differenziale elementare delle curve e delle superficie sono svolti dal Juvet con ben appariscente entusiasmo e vivo desiderio di far cosa utile agli studenti delle Scuole d'ingegneria, per i quali furono appunto redatti in occasione di un corso didattico nell' « École d'Ingegneurs de Lausanne ». La trattazione si presenta spigliata e matematicamente assai curata, per modo che la lettura riesce facile e convincente.

Sarebbe però desiderabile che il Juvet, così convinto dell'utilità del metodo vettoriale per la trattazione dei problemi geometrici e fisico-matematici, si avvicinasse più particolarmente, applicandovi il metodo di esposizione così efficace che gli è proprio, a quella forma di analisi vettoriale perfezionata in quest'ultimo trentennio specialmente per opera di noti matematici italiani, e che ora va diffondendosi con maggiore intensità che nel passato. Ne constaterebbe certamente vantaggio sia dal punto di vista formale, per quanto riguarda le notazioni, che da quello concettuale, per quanto riguarda il metodo di operare con i ben noti operatori, introdotti pure dall'A., sul vettore considerato soltanto come vettore libero, senza bisogno di farne altre distinzioni affatto non necessarie [salvo l'introduzione del nuovo ente vecteur glissant (vettore-applicato)] e che conducono ad una via metodologica meno scorrevole di quella a cui ho alluso. Venendo a qualche particolare dirò che la teoria dei campi scalari e vettoriali (funzioni di punto) viene dall'A. trattata senza l'uso delle omografie vettoriali, quale sarebbe ad esempio la derivata di un vettore rispetto al punto di cui è funzione. Invece l'uso di tali omografie è indiscutibilmente importante per lo studio sistematico degli operatori differenziali vettoriali, e per le conseguenti applicazioni geometriche e fisiche, come, in particolare, per le stesse teorie geometriche che dal Juvet in questo volume, al contrario, sono trattate col sussidio dei soli elementi di calcolo vettoriale. D'altra parte gli elementi sulle omografie vettoriali sufficienti per farne la stessa trattazione ed anche per completarne lo studio sono di pochissima entità.

Per la definizione degli operatori differenziali vettoriali *grad*, *div*, *rot*, l'A. ricorre alle formazioni integrali che in Italia sono state pure adoperate ad es. dal Maggi e dal recensore del libro in esame.

La diffusione del metodo vettoriale, sia pure per ora, nella forma presentata dal JUVET è un fatto assai lodevole e che non può renderci che assai consenzienti. M. MANARINI

R. GARNIER: *Cours de Mathématiques générales.* (Analyse et Géométrie). Tome I: « Calcul différentiel. Géométrie », pp. XI+463, 1930. Tome II: « Calcul intégral », pp. VI + 396, 1931. Gauthier-Villars, Paris.

La trattazione di questi due volumi presenta quella giusta estensione di esposizione e quel necessario rigore che si confà agli studenti indirizzati, non in particolar modo agli studi di matematica pura, per i quali però la lettura di detti libri potrebbe servire come efficace preparazione a quella di opere più complete e trattati classici, ma indirizzati agli studi delle scienze fisiche e tecniche e che, specialmente oggi, necessitano di cognizioni non vastissime, ma chiaramente e rigorosamente acquisite onde apprendere il meccanismo del calcolo con quella sicura perizia che poi dovranno usare intelligentemente nella pratica quotidiana.

Nel primo volume l'A. espone i fondamentali argomenti dell'Analisi e precisamente la teoria dei limiti, delle funzioni, delle serie ed i fondamenti della geometria analitica e differenziale del piano e delle superficie.

In queste ultime questioni geometriche l'A. fa uso del calcolo vettoriale frammisto all'ordinario metodo cartesiano. Per quanto riguarda il primo, l'A. si è tenuto assai vicino alla forma degli autori italiani BURALI-FORTI e MARCOLONGO ed in questo senso si può dire che il metodo tende a quella forma moderna che oggi va sempre più diffondendosi per la trattazione di tali argomenti.

Nel secondo volume l'A. tratta il calcolo integrale e la teoria delle equazioni differenziali presentando allo studioso di matematiche applicate quei fondamenti analitici di cui ne vedrà largo uso nelle applicazioni che per l'indirizzo dei suoi studi sarà condotto a trattare. Ed appunto in vista di questo particolare indirizzo l'A. gli presenta come esempi interessanti applicazioni tolte dalla geometria differenziale, dalla geometria delle masse, dalla termodinamica, insistendo, con esatta cognizione dei suoi bisogni pratici, specialmente sui differenti metodi d'integrazione e sopra speciali classi di equazioni differenziali.

Il volume termina con un'appendice ove, fra l'altro, sono completati gli elementi di calcolo vettoriale esposti mel primo volume con la teoria dei vettori-applicati (vecteurs glissants) in vista delle sue applicazioni meccaniche.

La lettura di questi due libri non può quindi essere che di grande vantaggio a chi deve apprendere le nozioni di cui trattano.

e. m.

S. BOCHNER: *Umkehrsätze für allgemeine Limitierungsverfahren.* (Berlin, W. de Gruyter, 1933, pag. 21. Prezzo RM. 2).

Il lavoro ha per oggetto lo studio di proposizioni che sono in qualche modo l'inversione dei procedimenti per la ricerca di limiti; proposizioni di cui il caso più semplice ed elementare è dato dal ben noto teorema di TAUBER, che inverte il teorema di ABEL sulle serie di potenze. Con procedimenti relativamente semplici e senza il ricorso agli integrali di FOURIER, l'A. ritrova varî dei risultati contenuti nella estesissima Memoria di N. WIENER, pubblicata nel 1929 negli « Annals of Mathematics ». (*u*)

A. HAMMERSTEIN: *Ueber die Approximation von Funktionen zweier komplexer Veränderlicher durch Polynome.* (Berlin, W. de Gruyter, 1933, pag. 10. Prezzo RM. 1).

L'A., dopo di avere ricordato come non valga per ogni campo quadrimensionale la proprietà che ogni funzione delle due variabili complesse, in esso regolare, sia approssimabile mediante polinomi e dopo di avere menzionato le ricerche in proposito di altri Autori e specialmente del BERGMANN, dimostra, fondandosi sull'impiego dei polinomi ortogonali normali pertinenti ad un dato campo, la possibilità dello sviluppo in serie di polinomi per le funzioni regolari in campi che sono una estensione di quelli detti stellari. (*u*)