
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

VLADIMIRO BERNSTEIN

Sui recenti progressi della teoria delle serie di Dirichlet

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 12 (1933), n.3, p. 159–167.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_3_159_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_3_159_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1933.

RELAZIONI SCIENTIFICHE

Sui recenti progressi della teoria delle serie di Dirichlet.

1. Si chiamano *serie di Dirichlet* le serie del tipo

$$(1) \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

dove s denota una variabile complessa, gli a_n sono dei coefficienti ed i λ_n (chiamati *esponenti* della serie) sono dei numeri positivi soddisfacenti alla condizione $\lambda_n \uparrow \infty$ per $n \uparrow \infty$ ⁽¹⁾. Recentemente H. BOHR ha studiato delle serie di DIRICHLET più generali, nelle quali i λ_n possono formare un insieme numerabile denso sopra ogni parte dell'asse reale; però noi qui non parleremo affatto di questi lavori che potranno meglio essere esposti in una relazione sulla teoria delle funzioni quasi-periodiche ⁽²⁾.

Il *campo di convergenza* della serie (1) (esclusi i casi estremi in cui la serie non converge mai, oppure converge dappertutto) ha la forma di un semi-piano $R(s) > C$; esso si chiama *semi-piano di convergenza*, mentre la retta $R(s) = C$ si chiama *retta di convergenza* ed il numero reale C si chiama *ascissa di convergenza*.

Anche il *campo di convergenza assoluta* è un semi-piano (esclusi i casi estremi); si definiscono così il *semi-piano*, la *retta* e l'*ascissa di convergenza assoluta*. I semi-piani di convergenza semplice e di convergenza assoluta non devono necessariamente coincidere, come ciò avviene per le serie di potenze. Al contrario, il semi-piano di convergenza semplice può estendersi al di fuori del semi-piano di convergenza assoluta; essi coincidono però certamente quando

⁽¹⁾ La notazione $x \uparrow A$ significa: x tende crescendo al limite A , mentre la notazione $x \downarrow A$ significa: x tende decrescendo al limite A . Queste notazioni sono dovute ad A. OSTROWSKI.

⁽²⁾ Vedi p. es. H. BOHR, *Fastperiodische Funktionen*. Berlin, 1932.

gli esponenti λ_n sono tali che

$$L = \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{\log |a_n|}{\lambda_n} = 0$$

ed in questo caso l'ascissa di convergenza (semplice ed assoluta) si esprime per mezzo della formola

$$C = \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{\log |a_n|}{\lambda_n}.$$

Nel caso generale, quando L può avere un valore arbitrario, si può asserire che la distanza fra le rette di convergenza semplice ed assoluta non può essere superiore a L . L'ascissa di convergenza semplice si esprime (quando essa è positiva) per mezzo della formola

$$C = \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left\{ \log \left| \sum_{v=1}^{v=n} a_v \right| \right\}$$

dovuta al CAHEN.

Molti studiosi si sono occupati dei procedimenti che permettono di prolungare la funzione $f(s)$ definita dalla serie (1) al di fuori del campo di convergenza della serie stessa. Sono stati così studiati numerosi *metodi di sommazione* delle serie di DIRICHLET. Una esposizione succinta, ma abbastanza completa di questi metodi si trova nel fascicolo del « Mém. des Sc. Math. » consacrato alle serie di DIRICHLET (3). Ci limiteremo qui a citare il più importante di questi metodi, e cioè il *metodo di sommazione per medie tipiche di M. Riesz*. Questo metodo è basato sulla formola

$$f(s) = \lim_{u=\infty} \sum_{\lambda_n < u} a_n e^{-\lambda_n s} \left(1 - \frac{\lambda_n}{u}\right)^k \quad (k - \text{cost. positiva}).$$

Il campo di sommabilità al quale conduce il metodo di sommazione per medie tipiche di M. RIESZ è un semi-piano che si estende spesso al di fuori del semi-piano di convergenza. Questo metodo permette di studiare le funzioni rappresentate da serie di DIRICHLET, nei semi-piani nei quali esse sono d'ordine finito, cioè nei semi-piani $R(s) > \sigma_0$, nei quali è soddisfatta una disequaglianza del tipo

$$(2) \quad |f(\sigma + it)| \leq M |t|^\mu \quad (M \text{ e } \mu - \text{cost. positive}).$$

Una differenza fondamentale fra le serie di potenze e le serie di DIRICHLET consiste in ciò che le funzioni rappresentate da serie

(3) G. VALIRON, *Séries de Dirichlet*. (« Mém. Sc. Math. », fasc. XVII. Paris, 1926, pp. 31-43).

di potenze possiedono sempre punti singolari sul contorno del campo di convergenza della serie, mentre per le serie di DIRICHLET questo fatto non ha più luogo. Un esempio classico di serie di DIRICHLET la cui somma non possiede nessun punto singolare sulla propria retta di convergenza è dato dalla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-s \log n}$$

che converge soltanto nel semipiano $R(s) > 0$, mentre la sua somma è una funzione intera di s (essa è uguale a $(1 - 2^{1-s})\zeta(s)$, ove $\zeta(s)$ è la celebre funzione di RIEMANN ⁽⁴⁾).

Questo esempio mostra che è utile introdurre la nozione dell'ascissa di olomorfia di una serie di DIRICHLET. Si chiama così il numero reale H , per il quale $f(s)$ risulta olomorfa nel semi-piano (aperto) $R(s) > H$, mentre essa possiede certamente dei punti singolari in ogni semi-piano $R(s) > H - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$. Notiamo che $f(s)$ non deve necessariamente possedere dei punti singolari sulla retta di olomorfia $R(s) = H$ medesima. È possibile che $f(s)$ abbia una infinità di punti singolari $s_m = \sigma_m + it_m$ con $\sigma_m \uparrow H$ e $t_m \uparrow \infty$ senza avere però nessun punto singolare sulla retta $R(s) = H$. ARONSZAJN ha mostrato che, quando $\lambda_{n+1} - \lambda_n \rightarrow 0$ per $n \uparrow \infty$, si può sempre scegliere i coefficienti a_n in modo che ciò avvenga ⁽⁵⁾.

Quanto abbiamo detto or ora mostra che si pongono naturalmente le seguenti domande: quali sono le serie di Dirichlet le cui rette di convergenza e di olomorfia coincidono certamente? più generalmente, quale può essere la posizione della retta di olomorfia rispetto alla retta di convergenza? quali sono le serie di Dirichlet la cui retta di convergenza (oppure la retta di olomorfia) contiene certamente dei punti singolari della funzione $f(s)$? E così via.

Lo studio di tali questioni ha fatto dei progressi notevoli negli ultimi quindici anni, e noi cercheremo di esporre qui brevemente i principali risultati ottenuti in questo campo.

In primo luogo conviene citare il teorema di LANDAU che generalizza un noto teorema di VIVANTI e che asserisce che, quando i coefficienti a_n sono positivi, il punto reale della retta di convergenza di (1) è singolare per la funzione $f(s)$ ⁽⁶⁾. Ulteriormente lo stesso LANDAU in collaborazione con CARLSON ha generalizzato il noto teorema di HADAMARD-FABRY dimostrando che quando

⁽⁴⁾ Vedi p. es. LANDAU, *Verteilung der Primzahlen*. Leipzig, 1909, p. 110.

⁽⁵⁾ « Comptes Rendus », t. 192, 1931, p. 1346.

⁽⁶⁾ « Math. Ann. », t. 61, 1905, p. 536.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$, la retta di convergenza di (1) è una linea singolare di $f(s)$ (7). In seguito PÓLYA ha mostrato che, quando si suppone solo che $\frac{n}{\lambda_n} \rightarrow 0$ per $n \uparrow \infty$, si può affermare che, oppure $f(s)$ è una funzione intera di s , oppure la retta di olomorfia di (1) è una singolare di $f(s)$ (8). D'altra parte, lo stesso PÓLYA ha dimostrato che, quando si suppone solo che $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$, si può asserire che la funzione $f(s)$ possiede infiniti punti singolari sulla retta di convergenza di (1): questi punti singolari sono disposti in modo che vi è almeno un punto singolare sopra ogni segmento della retta di convergenza, la cui lunghezza è superiore a $2\pi D$, ove D è il numero finito determinato per mezzo della formola

$$(3) \quad D = \lim_{z \rightarrow 1} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r) - n(rz)}{r - rz},$$

nella quale $n(r)$ denota il numero dei λ_n compresi fra 0 e r (9).

Questo numero D è chiamato *densità massima* della successione $\{\lambda_n\}$, mentre il limite del rapporto $\frac{n}{\lambda_n}$ (quando esso esiste) è chiamato *densità* della medesima successione.

Tutte queste proposizioni (le quali, come vedremo, sono state conglobate da V. BERNSTEIN (10) in un unico teorema generale) sono state dedotte da un importante teorema di CRAMER, il quale asserisce che, se $\zeta(z)$ è una funzione intera della variabile complessa z , soddisfacente per i valori abbastanza grandi di $|z|$ alla disegualianza

$$|\zeta(z)| < e^{(k+\varepsilon)|z|} \quad (k = \text{cost. non negativa})$$

comunque piccolo sia $\varepsilon > 0$, allora un punto s_F può essere un punto singolare per la funzione

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\lambda_n) a_n e^{-\lambda_n s},$$

soltanto, se si può rappresentare s_F sotto la forma $s_F = s_t + j$, ove s_t è un punto singolare della funzione $f(s)$, e j è un punto del cerchio $|s| \leq k$. Il CRAMER ha dato una dimostrazione elementare

(7) « Gött. Nachr. », 1921, p. 183.

(8) « Gött. Nachr. », 1927, p. 187.

(9) « Berl. Sitz. », 1923, p. 45.

(10) L'A. (seguendo in ciò l'esempio del VALIRON) crede di far bene citando i propri lavori nella stessa forma usata per i lavori altrui.

di questo teorema ⁽¹¹⁾; nel 1923 OSTROWSKI ne ha dato un'altra dimostrazione ⁽¹²⁾ basata sul fatto che le funzioni $F(s)$ e $f(s)$ sono legate dalla relazione

$$(4) \quad F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-u|=k+\varepsilon} f(s-u)\Phi(u)du,$$

ove $\Phi(u)$ denota la trasformata di LAPLACE (o la funzione determinante, di $\varphi(z)$). La trasformazione funzionale definita da questa relazione è stata studiata da PINCHERLE già nel 1888 ⁽¹³⁾; riprendendo questi studi di PINCHERLE, il PÒLYA ha migliorato il teorema di CRAMER mostrando che nella rappresentazione $s_F = s_f + j$ il punto j deve appartenere non solo al cerchio $|s| \leq k$, ma ad un certo campo convesso J che dipende dalla funzione $\varphi(z)$, e che spesso è notevolmente più ristretto che non il cerchio $|s| \leq k$. È precisamente servendosi di questo nuovo testo del teorema di CRAMER, che PÒLYA ha dimostrato le proposizioni che abbiamo poc'anzi citate. Proseguendo nello studio della trasformazione (4) V. BERNSTEIN ha dimostrato ⁽¹⁴⁾ che il punto j deve essere addirittura un punto singolare della funzione $\Phi(u)$ (trasformata di LAPLACE oppure determinante di $\varphi(z)$). SOULA ⁽¹⁵⁾ e V. BERNSTEIN ⁽¹⁶⁾ hanno dato anche altre generalizzazioni del teorema di CRAMER, nelle quali $\varphi(z)$ invece di essere una funzione intera, è olomorfa solo in certi settori, ed anche solo su una semi-retta.

Quando la successione $\{\lambda_n\}$ soddisfa alla condizione di PÒLYA $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$, la sua densità massima D , definita dalla formula (3), possiede la proprietà che D è il più piccolo numero per il quale esiste una successione $\{\mu_m\}$, contenente la successione $\{\lambda_n\}$ quale successione parziale, e soddisfacente alla condizione $\frac{m}{\mu_m} \rightarrow D$. Prendendo questa proprietà caratteristica come definizione, V. BERNSTEIN ha generalizzato la nozione della densità massima alle succes-

⁽¹¹⁾ « Arkiv. for. mat., astr. och fys. », t. 13, 1918.

⁽¹²⁾ « Berl. Sitz. », 1923, p. 39.

⁽¹³⁾ « Mem. R. Acc. Sc. Bologna », t. IX, 1888, pp. 45-71. Questa Memoria è stata recentemente ristampata negli « Acta Math. », t. 48, 1926, p. 279.

⁽¹⁴⁾ Questo risultato non è stato ancora pubblicato. Vedi il libro: V. BERNSTEIN, *Progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet* (in corso di pubblicazione nella « Collezione di Monografie sulla Teoria delle funzioni » diretta da E. BOREL).

⁽¹⁵⁾ « Journ. de Math. », t. 5, 1925, p. 339.

⁽¹⁶⁾ Vedi l. c. in ⁽¹⁴⁾.

sioni $\{\lambda_n\}$ che non soddisfanno alla condizione $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$ ⁽¹⁷⁾.

Per simili successioni, la densità massima può però anche essere infinita. Inoltre, per tali successioni, la considerazione della densità massima si è rivelata insufficiente. Infatti, la densità massima limita solo il numero dei λ_n che possono appartenere ad intervalli molto larghi, ma essa non limita in nessun modo la possibilità per i λ_n di riunirsi in gruppi di punti molto vicini. Per caratterizzare il grado di vicinanza dei λ_n in simili raggruppamenti, V. BERNSTEIN ha dovuto introdurre un altro indice, al quale egli ha dato il nome di *indice di condensazione* della successione $\{\lambda_n\}$ ⁽¹⁸⁾. Non daremo qui la definizione esatta di questo indice limitandoci ad indicare che esso può essere calcolato non appena si conosce la successione $\{\lambda_n\}$.

Ciò posto, V. BERNSTEIN ha dimostrato ⁽¹⁹⁾ il teorema seguente che comprende e generalizza i teoremi sopracitati di LANDAU-CARLSON e di PÖLYA. *Se la densità massima D della successione $\{\lambda_n\}$ è finita, allora ogni segmento della retta di olomorfia di (1), la cui lunghezza è superiore a $2\pi D$, contiene almeno un punto singolare di $f(s)$, e la distanza fra le rette di olomorfia e di convergenza di (1) non può essere superiore all'indice di condensazione della successione $\{\lambda_n\}$. In particolare, queste rette coincidono sempre, quando l'indice di condensazione della successione $\{\lambda_n\}$ è nullo.* D'altra parte lo stesso V. BERNSTEIN ha mostrato ⁽²⁰⁾ che, *quando la densità massima della successione $\{\lambda_n\}$ è finita, è sempre possibile riunire i termini della serie (1) in gruppi tali che la serie ottenuta sia assolutamente convergente in tutto il semi-piano di olomorfia.* Si può anche esprimere questo risultato in altra forma dicendo che, *quando la densità massima della successione $\{\lambda_n\}$ è finita, il semi-piano di olomorfia è sempre un campo di ultraconvergenza della serie (1).* (Una serie di funzioni analitiche è detta *ultraconvergente* quando essa possiede una successione di somme parziali che converge in un campo che si estende al di fuori del campo di convergenza della serie medesima).

Quando la densità massima della successione $\{\lambda_n\}$ è infinita, i risultati finora ottenuti sono molto meno precisi. V. BERNSTEIN ha mostrato ⁽²¹⁾ che, in questo caso, è sempre possibile scegliere i coefficienti a_n in modo tale che la serie (1) rappresenti una fun-

⁽¹⁷⁾ « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett. », vol. 63, 1930, pp. 327-343.

⁽¹⁸⁾ « Rend. R. Ist. Lomb. Sc. e Lett. », vol. 64, 1931, pp. 1172-1176.

⁽¹⁹⁾ Vedi l. c. in ⁽¹⁷⁾, p. 412.

⁽²⁰⁾ « Comm. Math. Helv. », t. 4, 1932, p. 23.

⁽²¹⁾ « Rend. R. Acc. Lincei », vol. 16, 1932, p. 6.

zione intera di s , pure convergendo solo in un semi-piano. Egli ha anche mostrato ⁽²²⁾ che *una modifica abbastanza piccola degli esponenti λ_n non modifica i punti singolari della funzione $f(s)$* . Recentemente, BOURION ha mostrato ⁽²³⁾ che, *qualora la (1) è ultraconvergente nell'intorno di un punto regolare della propria retta di convergenza, essa è anche ultraconvergente nell'intorno di ogni punto regolare di questa retta*.

Un gruppo di lavori di carattere un po' diverso dei precedenti è dovuto al MANDELBROJT, il quale si era proposto di trasportare alle serie di DIRICHLET il noto teorema di HADAMARD sulla moltiplicazione della singolarità delle serie di potenze. Egli ha dimostrato parecchi teoremi sulla composizione delle singolarità delle serie di DIRICHLET. Questi teoremi non possono però essere enunciati in modo succinto e perciò noi siamo costretti a contenterci di averli segnalati rinviando il lettore, per maggiore precisione, alle Memorie originali del MANDELBROJT ⁽²⁴⁾. Lo stesso MANDELBROJT ha dato più recentemente dei teoremi sulle serie di DIRICHLET, i cui esponenti soddisfanno a certe condizioni di carattere aritmetico ⁽²⁵⁾.

OSTROWSKI ⁽²⁶⁾ ha generalizzato per le serie di DIRICHLET il criterio che HADAMARD e FABRY hanno dato per stabilire se un punto del cerchio di convergenza di una serie di potenze è singolare o no. Data una serie di DIRICHLET (1) la cui ascissa di convergenza è uguale a C , una condizione necessaria e sufficiente affinché il punto $C + i\gamma$ non sia singolare per la funzione $f(s)$, è che si abbia

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{O_m} < 1,$$

ove si è posto

$$O_m = \sum_{\frac{m}{\sigma}(1-\omega) \leq \lambda_n \leq \frac{m}{\sigma}(1+\omega)} \alpha_n \left(\frac{\lambda_n \sigma e}{m} \right)^m e^{-(\sigma + C + i\gamma)\lambda_n},$$

σ e ω essendo dei numeri positivi arbitrarii. Questo criterio pare piuttosto complicato, ma siccome il criterio di HADAMARD-FABRY,

⁽²²⁾ Vedi l. c. in ⁽²¹⁾.

⁽²³⁾ « Comptes Rendus », t. 195, 1932, p. 1218. La dimostrazione non è ancora stata pubblicata.

⁽²⁴⁾ Vedi soprattutto « Acta Math. », t. 55, 1929, p. 1, o « Bull. Soc. Math. de France », t. 57, 1929, p. 78. Cfr. anche l. c. in ⁽¹⁴⁾.

⁽²⁵⁾ « Comptes Rendus », t. 194, 1932, p. 1884.

⁽²⁶⁾ « Sitz. Berl. Math. Ges. », t. 27, 1928, p. 32.

pur'esso complicato, è stato proficuamente utilizzato da molti studiosi, così è probabile che anche il criterio di OSTROWSKI potrà condurre ad interessanti risultati relativi alla distribuzione dei punti singolari delle serie di DIRICHLET.

Un'altra direzione, nella quale la teoria delle serie di DIRICHLET ha fatto notevoli progressi negli ultimi anni, è quella relativa alle inversioni del teorema di ABEL. Già DEDEKIND aveva mostrato che il teorema di ABEL si trasporta alle serie di DIRICHLET (cioè che la funzione $f(s)$, rappresentata dalla (1), è continua (a destra) in ogni punto della retta di convergenza, in cui la serie (1) converge). Molti teoremi, più o meno reciproci di questo teorema di ABEL-DEDEKIND, sono stati dimostrati da vari Autori, fra i quali conviene citare SCHNEE, LITTLEWOOD, HARDY, LANDAU, SCHMIDT, SZÁSZ ed altri ⁽²⁷⁾. Tutti questi teoremi si indicano al solito col nome di « teoremi Tauberiani », perchè il TAUBER fu il primo a dimostrare un teorema reciproco del teorema di ABEL (per le serie di potenze); le dimostrazioni dei teoremi Tauberiani erano quasi tutte molto complicate e difficili sino a quando, nel 1930, KARAMATA diede ⁽²⁸⁾ un nuovo metodo di dimostrazione, il quale non solo permise di ridimostrare molto semplicemente i teoremi già noti, ma diede anche la possibilità di completarli notevolmente. Per dare un esempio dei risultati ai quali si è giunti in questo campo, citiamo il seguente teorema di HARDY-LITTLEWOOD, modificato dal KARAMATA :

Sia $L(x)$ una funzione continua e positiva della variabile reale x , soddisfacente alla condizione $\frac{L(px)}{L(x)} \rightarrow 1$ per $x \uparrow \infty$, qualunque sia $p > 0$. Se la serie (1) converge nel semi-piano $R(s) > 0$, ed i suoi coefficienti sono tutti positivi, allora dalla relazione asintotica

$$\frac{f(s)s^z}{L\left(\frac{1}{s}\right)} \rightarrow 1 \quad \text{per } s \downarrow 0 \quad (z \geq 0),$$

risulta che

$$\frac{1}{x^z L(x)} \sum_{\lambda_n < x} a_n \rightarrow 1 \quad \text{per } x \uparrow \infty.$$

⁽²⁷⁾ Un'esposizione succinta di questi lavori può essere trovata nel fascicolo del VALIRON citato in ⁽³⁾ (pp. 25-28), oppure nella Nota di SZÁSZ, *Ueber Sätze Tauberscher Art* (« Jahresber. Deutsch. Math. Wiss. », 1930, p. 28).

⁽²⁸⁾ « Math. Zeitschr. », t. 32, 1930, p. 319, e « Journ. f. Math. » (Crelle), t. 164, 1931, p. 27. Vedi anche SZÁSZ, *Ueber einige Sätze von Hardy und Littlewood* (« Gött. Nachr. », 1930, p. 315).

La condizione che tutti i coefficienti a_n devono essere positivi può essere sostituita dalla condizione meno restrittiva che si abbia

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x, \lambda)}{x^\sigma L(x)} \geq -w(\lambda),$$

ove si è posto

$$A(x, \lambda) = \text{Min}_{x < t \leq x} \left\{ \sum_{x < \lambda_n \leq t} a_n \right\},$$

e dove $w(\lambda)$ è una funzione di λ , per la quale $w(1+0) = 0$ ⁽²⁹⁾.

Terminando questa relazione, ci rimane solo a chiedere venia agli Autori dei cui lavori non abbiamo parlato. Abbiamo cercato soprattutto di lumeggiare i nuovi indirizzi di studio che si sono fatti strada nella teoria delle serie di DIRICHLET durante l'ultimo ventennio. Abbiamo pertanto lasciato in disparte i lavori che si connettono più intimamente con gli indirizzi classici, come per es. le applicazioni aritmetiche delle serie di DIRICHLET, i metodi di sommazione ecc.. Ma anche per quel che concerne i rami della teoria, dei quali ci siamo occupati qui, abbiamo dovuto limitarci a delle considerazioni molto generali, e siamo rimasti molto lontani da un'esposizione sistematica dei risultati ottenuti. Il nostro scopo sarà raggiunto, se saremo riusciti a dare al lettore un concetto delle vie, secondo cui si sviluppa la teoria moderna delle serie di DIRICHLET.

VLADIMIRO BERNSTEIN

⁽²⁹⁾ « Journ. f. Math. », l. c. in ⁽²⁸⁾, p. 34.