Bollettino Unione Matematica Italiana

Gallo Gallina

Su una classe di equazioni differenziali lineari omogenee del 3° ordine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.3, p. 142–145.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_3_142_0>

Su una classe di equazioni differenziali lineari omogenee del 3° ordine.

Nota di GALLO GALLINA (a Pavia).

Sunto. - *Si determinano condizioni necessarie e sufficienti affinchè un' equazione lineare omogenea del 3° ordine ammetta un sistema fondamentale di integrali della forma* u^2, uv, v^2, *e si fa vedere come si possa costruire razionalmente, coi coefficienti dell' equazione del 3° ordine, un' equazione lineare omogenea del 2° ordine avente per integrali le funzioni* u *e* v.

1. G. MAMMANA [1] ha mostrato che l' equazione lineare omogenea autoaggiunta del 3° ordine

$$y''' + 4ay' + 2a'y = 0$$

ammette il sistema fondamentale di integrali

$$u^2, \quad uv, \quad v^2$$

dove u e v sono due integrali indipendenti dell' equazione lineare omogenea del 2° ordine

$$y'' + ay = 0.$$

Questa proprietà, che riduce razionalmente l' integrazione di una equazione del 3° ordine a quella di una del 2° ordine, non appartiene, ovviamente, alle sole equazioni autoaggiunte.

Essa è invece caratteristica delle equazioni lineari omogenee del 3° ordine aventi gli elementi di un sistema fondamentale di

[1] G. MAMMANA, *L' equazione del 3° ordine lineare omogenea*. « Rendiconti del R. Istituto Lombardo », serie 2ª, vol. 63, pag. 272; (Milano, 1930).

integrali legati da una relazione omogenea intera di 2° grado a coefficienti costanti non tutti nulli.

Infatti, se un' equazione lineare omogenea del 3° ordine

(1) $$y''' + ay'' + by' + cy = 0$$

ammette il sistema fondamentale di integrali

(2) $$y_1 = u^2, \quad y_2 = uv, \quad y_3 = v^2,$$

poichè tra questi integrali sussiste la relazione

(3) $$y_1 y_3 - y_2{}^2 = 0,$$

ne segue che gli elementi di qualsiasi altro sistema fondamentale di integrali sono pure legati da una relazione omogenea intera di 2° grado a coefficienti costanti non tutti nulli. E viceversa, se gli elementi z_1, z_2, z_3, di un sistema fondamentale di integrali della (1), sono legati da una relazione omogenea intera di 2° grado a coefficienti costanti non tutti nulli, cioè della forma

(4) $$\Sigma c_{hk} z_h z_k = 0,$$

dove h e k assumono le sei coppie di valori corrispondenti alle sei combinazioni con ripetizione della seconda classe che si possono formare con gli indici 1, 2, 3, la (1) ammette un sistema fondamentale di integrali della forma (2), essendo sempre possibile trovare tre combinazioni lineari di z_1, z_2, z_3, a coefficienti costanti e di determinante non nullo, tali che ponendo

$$y_i = \gamma_{1i} z_1 + \gamma_{2i} z_2 + \gamma_{3i} z_3 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

la (4) diventi la (3), dato che ciò sostanzialmente equivale al problema di riferire l'equazione di una conica [1] a due sue tangenti e alla corda di contatto.

Ciò premesso, resta da vedere come si possa riconoscere se una data equazione lineare omogenea del 3° ordine, come la (1), ammetta un sistema fondamentale di integrali della forma (2), e, in caso affermativo, come sia possibile costruire razionalmente, coi soli coefficienti della (1), l'equazione lineare omogenea del 2° ordine avente per integrali le funzioni u e v.

La risposta a queste domande trovasi in quanto segue.

2. Se

(5) $$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

è un' equazione lineare omogenea del 2° ordine, ed u e v sono due

[1] È evidente che la conica (4) non può essere degenere se z_1, z_2, z_3 sono gli elementi di un sistema fondamentale di integrali.

suoi integrali linearmente indipendenti, l'equazione lineare omogenea del 3° ordine avente il sistema fondamentale di integrali (2) è manifestamente

$$W(y,\ u^2,\ uv,\ v^2) = 0, \tag{6}$$

dove W rappresenta il wronskiano delle funzioni racchiuse entro la parentesi. Per esprimere il primo membro della (6) coi soli coefficienti della (5), si mettano in W al posto delle derivate di u e v, d'ordine eguale e superiore al secondo, i loro valori ricavati dalla (5), e si osservi poi che lo stesso W risulta il prodotto dei due determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 & 2uu' & u'^2 \\ 0 & uv & uv' + u'v & u'v' \\ 0 & v^2 & 2vv' & v'^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y & 1 & 0 & 0 \\ y' & 0 & 1 & 0 \\ y'' & -2\beta & -\alpha & 2 \\ y''' & 2(\alpha\beta - \beta') & -\alpha' + \alpha^2 - 4\beta & -6\alpha \end{vmatrix}$$

il primo dei quali è uguale a

$$(uv' - u'v)^3$$

e quindi, per la nota formola di LIOUVILLE, ha per valore

$$e^{-3\int \alpha dx}.$$

La (6), divisa per un fattore non nullo, è dunque l'equazione che si ottiene eguagliando a zero il secondo determinante, cioè è l'equazione

$$y''' + 3\alpha y'' + (\alpha' + 2\alpha^2 + 4\beta)y' + 2(\beta' + 2\alpha\beta)y = 0. \tag{7}$$

Dopo ciò è evidente che, affinchè l'equazione lineare omogenea (1) ammetta il sistema fondamentale di integrali (2), dove u e v sono due integrali indipendenti della (5), è necessario e sufficiente che i suoi coefficienti soddisfino le relazioni

$$a = 3\alpha, \quad b = \alpha' + 2\alpha^2 + 4\beta, \quad c = 2(\beta' + 2\alpha\beta) \tag{8}$$

che si ottengono identificando la (1) con la (7).

Da ciò segue allora che la relazione

$$9a'' + 18aa' - 27b' + 4a^3 - 18ab + 54c = 0, \tag{9}$$

che si ottiene eliminando α e β fra le (8), rappresenta la condizione necessaria e sufficiente a cui devono soddisfare i coefficienti della (1) affinchè essa ammetta il sistema fondamentale di integrali (2), dove u e v sono due integrali indipendenti di una opportuna equazione lineare omogenea del 2° ordine, la quale si ha dalla (5) ponendo

$$\alpha = \frac{a}{3}, \quad \beta = \frac{1}{36}(-3a' - 2a^2 + 9b). \tag{10}$$

3. La (9) esprime anche la condizione necessaria e sufficiente a cui devono soddisfare i coefficienti di una equazione lineare omogenea del 3° ordine, come la (1), affinchè tra i tre elementi z_1, z_2, z_3 di un suo sistema fondamentale di integrali sussista una relazione omogenea intera di 2° grado a coefficienti costanti non tutti nulli, come la (4).

Infatti, se Δ è il wronskiano delle sei funzioni $z_h z_k$, la condizione cercata è [1]

$$\Delta = 0, \tag{11}$$

e per ottenerla nella forma voluta non resta che esprimere Δ coi soli coefficienti della (1). Per questo si mettano in Δ al posto delle derivate di z_1, z_2, z_3, d'ordine eguale e superiore al terzo, i loro valori forniti dalla (1), e si eseguano le opportune semplificazioni: si trova così che Δ risulta il prodotto di due determinanti del 6° ordine, dei quali uno è diverso da zero, essendo la quarta potenza del wronskiano di z_1, z_2, z_3, e l'altro si riduce a

$$\begin{vmatrix} 1 & 9a' - 27b + 3a^2 \\ -2a & 9a'' - 27b' + 54c + 36ab - 2a^3 \end{vmatrix}.$$

La (11) è dunque equivalente alla relazione che si ottiene eguagliando a zero quest'ultimo determinante il cui valore coincide appunto col primo membro della (9).

4. Quanto precede permette pertanto di asserire che:

le equazioni lineari omogenee del 3° ordine che ammettono un sistema fondamentale di integrali della forma u², uv, v², *sono tutte e sole le equazioni* (1) *i cui coefficienti soddisfano la relazione* (9), *la quale esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè fra i tre elementi di un sistema fondamentale di integrali sussista una relazione omogenea intera di 2° grado a coefficienti costanti non tutti nulli. L'integrazione di siffatte equazioni è razionalmente equivalente a quella di una equazione lineare omogenea del 2° ordine che ammette per integrali indipendenti le funzioni* u *e* v: *tale equazione è la* (5) *nella quale al posto di* α *e* β *siano messi i valori* (10).

(1) Affinchè sussista la (4), la (11) è non solo necessaria, ma anche sufficiente perchè — come è detto più avanti — Δ risulta il prodotto di due determinanti del 6° ordine, di cui uno è sempre diverso da zero, e l'altro ha il complemento algebrico dell'ultimo elemento dell'ultima orizzontale che è uguale all'unità.