Bollettino Unione Matematica Italiana

Paolo Cattaneo

Sulle linee piane razionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.3, p. 139–142.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_3_139_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1933.

Sulle linee piane razionali.

Nota di PAOLO CATTANEO (a Padova).

Sunto. - *Date parametricamente le coordinate omogenee dei punti di una linea piana razionale, si trovano le equazioni della linea stessa e dell'inviluppo delle sue tangenti.*

1. Le coordinate omogenee x_1, x_2, x_3 dei punti di una linea C_n piana razionale siano date in funzione di un parametro t. Cerchiamo di esprimere per mezzo dei coefficienti delle tre funzioni $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ l'equazione della linea e quella dell'inviluppo delle sue tangenti.

Siano

$$(1)\qquad x_i(t) = \sum_{0}^{n}{}_h\, a_{i,h} t^{n-h} \qquad [i = 1, 2, 3]$$

le funzioni date. Considerando identici due indici di differenza 3, si ponga inoltre

$$(2)\qquad b_{i|h,k} = a_{i+1,h}a_{i+2,k} - a_{i+2,h}a_{i+1,k};$$

donde si ha tosto

$$b_{i|h,h} = 0 \qquad \text{e} \qquad b_{i|k,h} = -b_{i|h,k}.$$

Dalle (1) e dalle (2) si ha poi

$$x_1 \sum_0^n{}_h a_{l,h} t^{n-h} = x_l \sum_0^n{}_h a_{1,h} t^{n-h} \qquad [l=2,3],$$

e quindi

$$\text{(3)} \qquad \sum_0^n{}_h (a_{l,h} x_1 - a_{1,h} x_l) t^{n-h} = 0.$$

Troviamo il risultante dei primi membri delle (3), col metodo di BEZOUT-CAUCHY, esprimendolo sotto forma di determinante simmetrico d'ordine n.

Servendoci delle notazioni usate a pag. 806 della quarta edizione delle *Istituzioni di Analisi algebrica* del CAPELLI, si ha

$$d_{r,s} = (a_{2,r}x_1 - a_{1,r}x_2)(a_{3,s}x_1 - a_{1,s}x_3) -$$
$$-(a_{3,r}x_1 - a_{1,r}x_3)(a_{2,s}x_1 - a_{1,s}x_2) = x_1 \sum_1^3{}_i b_{i|r,s} x_i,$$
$$c_{r,s} = \sum_0^s{}_t d_{t,r+s+1-t} = x_1 \sum_1^3{}_i x_i \sum_0^s{}_t b_{i|t,r+s+1-t}.$$

L'elemento essesimo della riga erresima del determinante suaccennato è $c_{r-1,s-1}$, ossia, prescindendo dal fattore comune x_1, è

$$\sum_1^3{}_i x_i \sum_0^{s-1}{}_t b_{i|t,r+s-1-t},$$

dove va ricordato che, quando $r+s-1-t > n$, si ha sempre

$$b_{i|t,r+s-1-t} = 0.$$

La risultante della (3), ossia l'equazione della linea C_n, può dunque porsi sotto la forma

$$\text{(4)} \qquad \sum_1^3{}_{h_1h_2\dots h_n} D_{h_1h_2\dots h_n} \cdot x_{h_1}x_{h_2}\dots x_{h_n} = 0,$$

dove il coefficiente $D_{h_1h_2\dots h_n}$ è dato dal determinante che ha per elemento essesimo della riga erresima la somma

$$\sum_0^{s-1}{}_t b_{h_s|t,r+s-1-t}.$$

Se nella (1) si ha $n=3$, l'equazione della cubica corrispondente è

$$\text{(4')} \qquad \sum_1^3{}_{hkl} \begin{vmatrix} b_{h|0,1} & b_{k|0,2} & b_{l|0,3} \\ b_{h|0,2} & b_{k|0,3} + b_{k|1,2} & b_{l|1,3} \\ b_{h|0,3} & b_{k|1,3} & b_{l|2,3} \end{vmatrix} \cdot x_h x_k x_l = 0.$$

Nel caso $n=4$ la corrispondente quartica ha per equazione

$$(4'') \quad \sum_1^3{}_{hklj} \begin{vmatrix} b_{h|0,1} & b_{k|0,2} & b_{l|0,3} & b_{j|0,4} \\ b_{h|0,2} & b_{k|0,3}+b_{k|1,2} & b_{l|0,4}+b_{l|1,3} & b_{j|1,4} \\ b_{h|0,3} & b_{k|0,4}+b_{k|1,3} & b_{l|1,4}+b_{l|2,3} & b_{j|2,4} \\ b_{h|0,4} & b_{k|1,4} & b_{l|2,4} & b_{j|3,4} \end{vmatrix} \cdot x_h x_k x_l x_j = 0.$$

2. L'equazione della tangente alla C_n nel punto di parametro t è

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1(t) & x_1'(t) \\ x_2 & x_2(t) & x_2'(t) \\ x_3 & x_3(t) & x_3'(t) \end{vmatrix} = 0 ;$$

sicchè l'inviluppo delle tangenti è dato, parametricamente, dalle equazioni

$$u_i = x_{i+1}(t) \cdot x_{i+2}'(t) - x_{i+2}(t) - x_{i+1}'(t),$$

ossia, ricordando le (1), dalle

$$(5) \qquad u_i = \sum_0^n{}_{hk} (n-k) \cdot b_{i|h,k} \cdot t^{2n-h-k-1}.$$

In generale, se non ci sono cuspidi, la classe della C_n è, notoriamente, $n(n-1) - 2[(n-1)(n-2):2] = 2(n-1)$. Ciò resta confermato dalla (5), essendo sempre nulli tutti tre i coefficienti $b_{i|0,0}$; sicchè il massimo esponente di t, quindi la classe di C_n, non può superare $(2n-1)$, c. d. d..

Dalla (5), ponendo

$$(6) \qquad A_{i,l} = \sum_0^{l+1}{}_k (n-k) \cdot b_{i|l+1-k,k},$$

si ha

$$(7) \qquad u_i = \sum_0^{2n-2}{}_l A_{i|l} t^{2n-2-l}.$$

Nei casi particolari $n=3$ ed $n=4$ si ha, rispettivamente,

$$(7') \qquad u_i = b_{i|1,0} t^4 + 2b_{i|2,0} t^3 + (3b_{i|3,0} + b_{i|2,1}) t^2 + 2b_{i|3,1} t + b_{i|3,2}$$

ed

$$(7'') \quad \begin{cases} u_i = b_{i|1,0} t^6 + 2b_{i|2,0} t^5 + (3b_{i|3,0} + b_{i|2,1}) t^4 + 2(2b_{i|4,0} + b_{i|3,1}) t^3 + \\ \qquad + (3b_{i|4,1} + b_{i|3,2}) t^2 + 2b_{i|4,2} t + b_{i|4,3}. \end{cases}$$

Ponendo

$$(8) \qquad 2(n-1) = \nu, \quad B_{i|h,k} = A_{i+1,h} A_{i+2,k} - A_{i+2,h} A_{i+1k},$$

ed applicando agli inviluppi piani di rette il procedimento seguito nel n. 1 per le linee piane, si vede tosto che l'inviluppo delle tangenti alla C_n ha per equazione

$$(9) \qquad \sum_{1}^{3}{}_{h_1 h_2 \dots h_\nu} D_{h_1 h_2 \dots h_\nu} \cdot u_1 u_2 \dots u_{h_\nu} = 0,$$

dove il coefficiente $D_{h_1 h_2 \dots h_\nu}$ è dato dal determinante che ha per elemento essesimo della riga erresima la somma

$$\sum_{0}^{s-1}{}_t \, B_{h_s | t, r+s-1-t}.$$

Nel caso delle cubiche ($n = 3$) si ha per equazione tangenziale quella che si ottiene dalla (4″) ponendo B ed u al posto di b e di x.