
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

HAROLD HILTON

Sulle superficie armoniche

* Estratto di una lettera al Direttore del «Bollettino»

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 12 (1933), n.3, p. 138–139.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_3_138_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_3_138_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sulle superficie armoniche.

Estratto di una lettera del prof. HAROLD HILTON (a Londra)
al Direttore del « Bollettino ».

.... ho visto che il prof. A. CHIellini ha risolto il problema di trovare le superficie rigate soddisfacenti alla relazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (1);$$

io ho trattato il problema indipendentemente. Paragonando la mia risoluzione con la sua, la differenza mi sembra tale che possa essere interessante il farla conoscere. Se voi pensate che possa interessarlo, sarò lieto se voi vorrete gentilmente mostrargliela.

Scrivendo per brevità

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x}, & q &= \frac{\partial z}{\partial y}, & r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, & s &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, & t &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ l &= \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, & m &= \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, & n &= \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, & k &= \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \\ \varepsilon &= \frac{dy}{dz}, & \frac{d\varepsilon}{dx} &= \frac{d^2 y}{dx^2} \end{aligned}$$

le geodetiche sono

$$(1) \quad (1 + p^2 + q^2) \frac{dr}{dx} + (r + 2s\varepsilon + t\varepsilon^2)(q - p\varepsilon) = 0.$$

La superficie è rigata, se una famiglia di asintotiche

$$(2) \quad r + 2s\varepsilon + t\varepsilon^2 = 0$$

è geodetica. Differenziando la (2) rispetto ad x ed eliminando $\frac{d\varepsilon}{dx}$, troviamo

$$(3) \quad l + 3m\varepsilon + 3n\varepsilon^2 + k\varepsilon^3 = 0.$$

La condizione per una superficie rigata si ottiene eliminando ε tra (2) e (3).

Come caso particolare si prenda $z = f(x) + \varphi(y)$; escludendo $f(x) = ax + b$, $\varphi(y) = a'y + b'$, si trova, eliminando ε

$$\left(\frac{f'''}{f''^2} \right)^2 = - \left(\frac{\varphi'''}{\varphi''^2} \right)^2.$$

(1) « Bollettino Unione Matematica Italiana », 1932, pag. 201.

Ogni membro di questa equazione è costante, perchè una funzione di x può essere uguale ad una funzione di y solo se è costante. Allora, f e φ sono immediatamente trovati.

Di nuovo si prenda

$$z = f(y + \alpha x) + \varphi(y + \beta x)$$

Poniamo $y + \alpha x = X$, $y + \beta x = Y$. Le equazioni (2) e (3) sono invarianti rispetto a questa trasformazione e la soluzione è riducibile al caso precedente.

Per $\alpha = i$, $\beta = -i$ si ha il caso del prof. CHIellini.

Rimpiazzando la (2) con

$$\cotg^2 z (1 + \varepsilon^2) = (p + \varepsilon q)^2$$

possiamo dimostrare che una famiglia di linee sulla superficie, di inclinazione costante coll'asse delle z , non possono essere tutte geodetiche sulla superficie (escludendo il piano).

Rimpiazzando la (2) con $q = p\varepsilon$, possiamo trovare le superficie su cui le linee di massima pendenza sull'asse delle z siano tutte geodetiche. Otteniamo

$$(r - t)pq = s(p^2 - q^2)$$

che è facilmente risolubile.