Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Armando Chiellini

Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.3, p. 134–137.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_3_134_0>

Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

Nota di ARMANDO CHIELLINI (a Cagliari).

Sunto. - *L'Autore, utilizzando una proprietà generale delle equazioni differenziali lineari omogenee, determina una particolare classe di equazioni lineari del secondo ordine, riconducibili alle quadrature.*

1. Ricordiamo la proprietà: « Ogni forma di grado m, in n soluzioni particolari di un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n, soddisfa ad un'equazione differenziale lineare ed omogenea di ordine $\binom{n+m-1}{m}$; e se le soluzioni sono linearmente indipendenti, ne rappresenta l'integrale generale » [1].

Applichiamo ciò all'equazione

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0; \tag{1}$$

siano y_1, y_2 due suoi integrali particolari, linearmente indipendenti e poniamo

$$z = Ay_1^2 + 2By_1y_2 + Cy_2^2, \tag{2}$$

con A, B, C costanti arbitrarie. L'equazione differenziale del terzo ordine a cui soddisfa la z (come si trova facilmente) è

$$z''' + 3a_1 z'' + (a_1' + 2a_1^2 + 4a_2)z' + 2(a_2' + 2a_1a_2)z = 0. \tag{3}$$

Supponiamo ora che tra i coefficienti della (1) interceda la relazione

$$a_2' + 2a_1a_2 = 0; \tag{4}$$

in tal caso la (3) ammette l'integrale particolare $z = \text{cost}^{\text{te}}$ e quindi: *L'equazione differenziale*

$$y'' - \frac{a'}{2a} y' + ay = 0 \tag{5}$$

ha la proprietà che ad alcuni suoi integrali particolari y_1 *se ne possono associare altri* y_2, *in guisa che un'opportuna loro forma quadratica*

$$Ay_1^2 + 2By_1y_2 + Cy_2^2 \tag{6}$$

rimanga costante.

[1] SCHLESINGER, *Handbuch der theorie der linearen Differentialgleichungen.* (Band II, pag. 201).

Due tali integrali particolari li diremo *associati* rispetto alla forma (A, B, C)

2. Osservato ciò, ragioniamo nel modo seguente: l'equazione

$$z''' - \frac{3a'}{2a} z'' + \left(4a - \frac{a''}{2a} + \frac{a'^2}{a^2}\right) z' = 0 \tag{7}$$

(che è quella a cui si riduce la (3) sotto l'ipotesi (4)) ha una soluzione nota (cioè $z = \mathrm{cost}^{\mathrm{te}}$).

Questo significa che fra tutte le forme quadratiche di due integrali particolari qualunque della (5), ve n'è una che ha un valore costante; allora potremo:

1°) *fissare due integrali particolari della* (5) e far variare i coefficienti della forma quadratica (6), per vedere se sarà possibile trovare una o più forme (A, B, C), rispetto alle quali essi risultino associati,

2°) *fissare i coefficienti della forma quadratica* (6) e far variare la coppia degli integrali associati (il che significa effettuare sopra questi integrali una sostituzione lineare), per vedere se esistono coppie di integrali associati, rispetto alla data forma (A, B, C)

3. Per il primo scopo osserviamo che se y_1, y_2 sono due integrali particolari, linearmente indipendenti, della (5),

$$y_1^2, \quad y_1 y_2, \quad y_2^2$$

sono tre integrali linearmente indipendenti della corrispondente equazione (7) e quindi una loro combinazione lineare omogenea, a coefficienti costanti, ce ne darà l'integrale generale. Allora ne segue che ogni soluzione della (7) (nel caso nostro la soluzione costante) si potrà ottenere con valori opportuni delle costanti A, B, C, i quali risulteranno univocamente determinati; se ne conclude quindi che: *Fissati due integrali indipendenti qualunque della* (5), *esiste sempre una loro forma quadratica, ben determinata, che assume un valore costante.*

Per il secondo scopo, prendiamo due integrali particolari $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ e sia $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ la forma rispetto alla quale essi risultano associati; dopo ciò considerata la forma qualunque (A, B, C) e detti

$$y_1 = c_1 \bar{y}_1 + c_2 \bar{y}_2, \quad y_2 = \gamma_1 \bar{y}_1 + \gamma_2 \bar{y}_2, \quad \Delta = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ \gamma_1 & c_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

due altri integrali particolari qualunque, vediamo di determinare le c e γ, in guisa che y_1, y_2 risultino associati rispetto ad (A, B, C);

dovrà essere per questo

$$Ay_1^2 + 2By_1y_2 + Cy_2^2 = 1$$

cioè

$$(Ac_1^2 + 2Bc_1\gamma_1 + C\gamma_1^2)\bar{y}_1^2 + 2(Ac_1c_2 + B[c_1\gamma_2 + c_2\gamma_1] + C\gamma_1\gamma_2)\bar{y}_1\bar{y}_2 + \\ + (Ac_2^2 + 2Bc_2\gamma_2 + C\gamma_2^2)\bar{y}_2^2 = 1$$

e quindi

$$\begin{cases} Ac_1^2 + 2Bc_1\gamma_1 + C\gamma_1^2 = \bar{A} \\ Ac_1c_2 + B(c_1\gamma_2 + c_2\gamma_1) + C\gamma_1\gamma_2 = \bar{B} \\ Ac_2^2 + 2Bc_2\gamma_2 + C\gamma_2^2 = \bar{C} \end{cases}$$

da cui potremo ricavare in infinite maniere le c e le γ, purchè siano contemporaneamente

$$AC - B^2 \text{ e } \bar{A}\bar{C} - \bar{B}^2$$

differenti da zero o uguali a zero [1].

(Il caso di $AC - B^2 = 0$ e quindi anche di $\bar{A}\bar{C} - \bar{B}^2 = 0$, porta ad essere $a_2 = 0$ ed allora l'equazione (5) si integra immediatamente per quadrature).

4. Questo secondo caso si può anche trattare nel modo seguente: ponendo la forma (6) $= 1$ e risolvendo rispetto ad y_2, otteniamo:

$$y_2 = \frac{-B}{C} y_1 \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{C} \qquad \{\Delta = (B^2 - AC)y_1^2 + C\}$$

da cui derivando:

$$y'_2 = \frac{-By'_1}{C} \pm \frac{B^2 - AC}{C}\frac{y_1y'_1}{\sqrt{\Delta}}, \quad y_2'' = \frac{-By_1''}{C} \pm \frac{B^2 - AC}{C}\frac{\Delta + Cy'^2_1}{\sqrt{\Delta^3}};$$

sostituendo nella (5), mediante un calcolo un pò lungo, ma che non presenta alcuna difficoltà, otteniamo l'equazione di condizione per y_1:

(8) $$(B_2 - AC)(ay_1^2 + y_1'^2) + aC = 0.$$

Se ne conclude: *Fissata la terna* (A, B, C), *esistono infine coppie di integrali, linearmente indipendenti, associati rispetto ad essa, e si ottengono tutte risolvendo la* (8).

In particolare risulta l'esistenza, o no, dell'integrale associato ad un integrale prefissato, secondo che non si fissino, oppure si fissino, i coefficienti della terna (A, B, C).

[1] Si verifica infatti, con un calcolo immediato, la relazione

$$\bar{A}\bar{C} - \bar{B}^2 = (c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1)^2 (AC - B^2)$$

5. Dalle considerazioni precedenti, discende immediatamente la possibilità dell'integrazione della (5) mediante quadrature. Infatti, per ciò che precede possiamo supporre, che la forma quadratica che consideriamo sia quella semplice $(0, B, 0)$ con $B \neq 0$; allora dalla (8) otteniamo

$$\left(\frac{y_1'}{y_1}\right)^2 = -a$$

cioè $y_1 = e^{\int\sqrt{-a}dx}$ da cui $y_2 = e^{-\int\sqrt{-a}dx}$ e quindi:

L'integrale generale dell'equazione

$$y'' - \frac{a'}{2a}y' + ay = 0$$

è dato da

$$y = c_1 e^{\int\sqrt{-a}dx} + c_2 e^{-\int\sqrt{-a}dx}.$$

6. Le considerazioni svolte al numero 3° hanno però un valore del tutto generale e permettono di illustrare il fatto che la conoscenza di un integrale particolare della (3) riduca l'integrazione della (1) ad una del 1° ordine. Infatti, supponiamo di conoscere un particolare integrale della (3); allora, sotto l'ipotesi $AC - B^2 \neq 0$, potremo sempre ridurci alla particolare forma quadratica $y_1 y_2$: allora se $z(x)$ è la soluzione nota della (3), avremo

$$y_1 y_2 = z(x), \quad y_2 = \frac{z(x)}{y_1}$$

da cui

$$y_1'' y_2 + 2y_1' y_2' + y_1 y_2'' = z''$$

e tenendo conto della (1):

$$2z'(x)\left(\frac{y_1'}{y_1}\right) - 2z(x)\left(\frac{y_1'}{y_1}\right)^2 = Z(x)$$

con $Z(x) = z'' + a_1 z' + 2a_2 z$. Questa è l'equazione del primo ordine che ci fornisce una soluzione particolare della (1); nel caso di $z(x) = 1$, ritroviamo l'equazione

$$\left(\frac{y_1'}{y_1}\right)^2 = -a_2$$

già trovata al numero 5°.