

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

GIUSEPPE USAI

**Sulla serie  $\sum_1^\infty \frac{n^r}{n!} x^n$  e su un  
triangolo aritmetico**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,*  
Vol. **12** (1933), n.3, p. 131–133.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_3_131_0)  
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1933\\_1\\_12\\_3\\_131\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_3_131_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione  
Matematica Italiana, 1933.

# Sulla serie $\sum_1^{\infty} \frac{n^r}{n!} x^n$ e su un triangolo aritmetico.

Nota di GIUSEPPE USAI (a Catania).

**Sunto.** - Si ottiene il calcolo della serie facendo uso di una formula tra gli elementi di un triangolo numerico. Inoltre si danno espressioni mediante gli Aleph e le differenze di Or.

1. Il prof. ARMANDO CHIELLINI in una sua interessante Nota <sup>(1)</sup> determina per via aritmetica ed elementare la somma della serie  $\sum_1^{\infty} \frac{n^r}{n!}$ .

Pigliando ora le mosse da tale lavoro farò vedere che la somma in questione è una conseguenza quasi immediata della formula:

$$(1) \quad n^r = a_{r,1}n + a_{r,2}n(n-1) + \dots + a_{r,r}n(n-1) \dots (n-r+1)$$

( $r, n$  interi e positivi) la quale io ho dimostrato <sup>(2)</sup> in riguardo al triangolo numerico <sup>(3)</sup> i cui elementi in numero di  $r$  per ogni linea  $r^{ma}$ , verificano le condizioni:

$$\begin{aligned} a_{r,1} &= 1, & a_{r,r} &= 1 & (r=1, 2, 3, \dots) \\ a_{r,s} &= sa_{r-1,s} + a_{r-1,s-1} & (r=3, 4, 5, \dots; s=2, 3, \dots, r-1). \end{aligned}$$

Per maggior generalità mi riferisco alla serie  $\sum_1^{\infty} \frac{n^r}{n!} x^n$  e di questa determinerò l'espressione:

$$(2) \quad S(x) = e^x \left( \sum_{k=1}^r a_{r,k} x^k \right)$$

(1) ARMANDO CHIELLINI, *Sulla serie  $\sum_1^{\infty} \frac{n^r}{n!}$* . « Bollettino Unione Matematica Italiana », Bologna 1931.

(2) GIUSEPPE USAI, *Sui miei triangoli aritmetici e su una equazione di Fuchs*. « Atti Accademia Gioenia », Catania, vol. XV, 1928.

(3) Questi triangoli erano stati già usati da NETTO, *Lehrbuch der Combinatorik*; come osserva LETTERIO TOSCANO, *Sul triangolo di Tartaglia generalizzato*. « Rendiconti Istituto Lombardo », Milano 1931.

già trovata dal prof. SCHWATT <sup>(1)</sup> mediante un noto operatore differenziale <sup>(2)</sup>.

2. Per il nostro intento è bene mettere la (1) nella forma:

$$(3) \quad \frac{n^r}{n!} = \frac{a_{r1}}{(n-1)!} + \frac{a_{r2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{a_{r,r-1}}{(n-r+1)!} + \frac{a_{rr}}{(n-r)!}$$

e tener presente i casi particolari:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{1^r}{1!} &= a_{r1} \\ \frac{2^r}{2!} &= \frac{a_{r1}}{1!} + a_{r2} \\ \frac{3^r}{3!} &= \frac{a_{r1}}{2!} + \frac{a_{r2}}{1!} + a_{r3} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{r^r}{r!} &= \frac{a_{r1}}{(r-1)!} + \frac{a_{r2}}{(r-2)!} + \dots + \frac{a_{r,r-1}}{1!} + a_{rr}. \end{aligned}$$

Posto ciò dalla (3) risulta:

$$(5) \quad \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{n!} x^n &= \frac{1^r}{1!} x + \frac{2^r}{2!} x^2 + \dots + \frac{r^r}{r!} x^r + \\ &+ \sum_{n=r+1}^{\infty} x^n \left\{ \frac{a_{r1}}{(n-1)!} + \frac{a_{r2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{a_{rr}}{(n-r)!} \right\}. \end{aligned}$$

Ma si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{r+1}^{\infty} x^n \frac{a_{r1}}{(n-1)!} &= x a_{r1} \sum_{r+1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x a_{r1} \left\{ e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \right\} \\ \sum_{r+1}^{\infty} x^n \frac{a_{r2}}{(n-2)!} &= x^2 a_{r2} \sum_{r+1}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} = x^2 a_{r2} \left\{ e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^{r-2}}{(r-2)!} \right\} \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{r+1}^{\infty} x^n \frac{a_{rr}}{(n-r)!} &= x^r a_{rr} \sum_{r+1}^{\infty} \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} = x^r a_{rr} \{ e^x - 1 \}. \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> *On introduction to the operations with series.* (Press of the University of Pensilvania. Philadelphia, 1924).

<sup>(2)</sup> Il CHIELLINI riporta l'espressione  $S(x)$  del SCHWATT senza il fattore  $x^k$  ma l'omissione è da attribuirsi ad errore di stampa.

Sicchè sostituendo nella (5) abbiamo :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^r}{n!} x^n = e^x (a_{r1}x + a_{r2}x^2 + \dots + a_{rr}x^r) + x \left( \frac{1^r}{1!} - a_{r1} \right) + \\ + x^2 \left( \frac{2^r}{2!} - \frac{a_{r1}}{1!} - a_{r2} \right) + \dots + x^r \left( \frac{r^r}{r!} - \frac{a_{r1}}{(r-1)!} - \frac{a_{r2}}{(r-2)!} - \dots - \frac{a_{r,r-1}}{1!} - a_{rr} \right)$$

e questa per le relazioni (4) si riduce subito alla

$$(6) \quad \sum_1^{\infty} \frac{n^r}{n!} x^n = e^x (a_{r1}x + a_{r2}x^2 + \dots + a_{rr}x^r)$$

in pieno accordo con la (2) del prof. SCHWATT.

Per  $x=1$  si ha invece :

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^r}{n!} = e(a_{r1} + a_{r2} + \dots + a_{rr})$$

cioè il risultato ottenuto dal CHIELLINI.

3. La serie trattata è esprimibile in altre maniere. Basta perciò tener presente l'espressione :

$$a_{rs} = O_{r-s}(1, 2, \dots, s) \quad (O_0 = 1)$$

ove  $O(1, 2, \dots, s)$  è il valore della espressione omogenea di grado  $i$  formata coi numeri  $1, 2, \dots, s$  ed a coefficienti unitari (Aleph di WRONSKI) ed inoltre la relazione <sup>(1)</sup> che si ha ricorrendo alle differenze di  $O^r$  cioè :

$$\Delta^s O^r = s! a_{rs}.$$

Avremo quindi sostituendo nella (6) le espressioni :

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^r}{n!} x^n = e^x \left[ \sum_{s=1}^r O_{r-s}(1, 2, \dots, s) x^s \right] \\ \sum_1^{\infty} \frac{n^r}{n!} x^n = e^x \left[ \sum_{s=1}^r \frac{\Delta^s O^r}{s!} x^s \right]$$

e queste danno la somma della serie rispettivamente in Aleph e in differenze  $\Delta^s O^r$ .

<sup>(1)</sup> Queste due formule trovansi riportate nella Nota : GIUSEPPE USAI, *Sopra un triangolo numerico del Galvani*, « Bollettino Accademia Gioenia », fascicolo 59, 1928.