Bollettino Unione Matematica Italiana

Beniamino Segre

Intorno ad un teorema di Kakeya

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.3, p. 123–130.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_3_123_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1933.

Intorno ad un teorema di Kakeya.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Bologna).

Sunto. - *Si dimostra in modo estremamente semplice un teorema di* S. KAKEYA, *aggiungendo altre proposizioni che ad esso si collegano.*

1. Un bel teorema, dovuto a KAKEYA [1], afferma che:
Se l'equazione algebrica

$$f(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0 \tag{1}$$

è a coefficienti reali positivi e costituenti una successione monotona non crescente, le sue radici (reali o complesse) sono tutte in valor assoluto non minori dell'unità.

Altre dimostrazioni di tale teorema furon successivamente date da HAYASHI [2], KUROKAWA [3] e HURWITZ [4]; però nessuna delle di-

(1) S. KAKEYA, *On the Limits of the Roots of an Algebraic Equation with Positive Coefficients*, « Tôhoku Math. Journ. », t. 2 (1912), p. 140.

(2) T. HAYASKI, *On the Roots of an Algebraic Equation*, ibid., t. 3 (1913), p. 110.

(3) R. KUROKAWA, *A Theorem in Algebra*, ibid., t. 3 (1913), p. 173.

(4) A. HURWITZ, *Ueber einen Satz des Herrn Kakeya*, ibid., t. 4 (1914), p. 89; quivi si dà pure la condizione — che noi ritroveremo più semplicemente al n. 5 — necessaria e sufficiente affinchè un'equazione algebrica del tipo indicato, possegga qualche *radice di modulo unitario.*

mostrazioni citate presenta quei caratteri di semplicità ed immediatezza che sarebbero desiderabili: tanto che nella « *Corrispondenza* » dell'ultimo fascicolo di questo « Bollettino », si domandava appunto una dimostrazione del teorema di KAKEYA *il più possibile elementare.* A tale requisito pare soddisfi la dimostrazione che qui otteniamo nel n. 2, poggiando su d'un lemma già di per sè interessante, del quale poi facciamo numerose applicazioni; fra queste segnaliamo solo la seguente proposizione, che ha anche l'analoga per i polinomi (n. 8):

Data una serie di potenze

$$\Theta(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

priva del termine costante ed avente gli altri coefficienti reali positivi, se μ *è l'estremo inferiore dei rapporti*

$$\frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{a_2}{a_3}, \quad \frac{a_3}{a_4}, \dots,$$

i valori reali assunti dalla $\Theta(z)$ *in corrispondenza a valori reali negativi o complessi della* z, *interni al suo cerchio di convergenza ed in modulo minori di* μ, *risultano necessariamente negativi ed in valor assoluto minori di* μa_1.

2. LEMMA. — *Se i coefficienti della* (1) *son reali e soddisfanno alle:*

$$(2) \qquad a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0,$$

per ogni valore, in modulo minor di 1, *della variabile complessa* z, *risulta:*

$$\Re[(1-z)f(z)] > 0 \text{ (1)}.$$

Posto:

$$(3) \qquad a_0 - a_1 = b_0, \quad a_1 - a_2 = b_1, \dots, \quad a_{n-1} - a_n = b_{n-1}, \quad a_n = b_n,$$

donde segue:

$$a_r = \sum_{i=r}^{n} b_i \qquad (\text{per } r = 0, 1, \dots, n-1, n),$$

ed inoltre, in forza delle (2),

$$(4) \qquad b_0 \geq 0, \quad b_1 \geq 0, \dots, \quad b_{n-1} \geq 0, \quad b_n > 0,$$

(1) Se ζ è un qualunque numero complesso, indichiamo con $\Re(\zeta)$ la sua parte reale. Si rilevi, ciò che ci servirà nel seguito, che *per* $|\zeta| \leq 1$ *risulta* $\Re[1-\zeta] \geq 0$, *in quest'ultima limitazione valendo il segno di uguaglianza solo per* $\zeta = 1$.

si ottiene dalla (1):

$$f(z) \equiv b_0 + b_1(1+z) + b_2(1+z+z^2) + \dots + b_n(1+z+\dots+z^n),$$

eppertanto:

$$(1-z)f(z) \equiv \sum_{r=0}^{n} b_r(1-z^{r+1}). \tag{5}$$

Per $|z|<1$ risulta $|z^{r+1}|<1$ e quindi $\Re[1-z^{r+1}]>0$; avuto riguardo alle (4), la (5) mostra senz'altro la verità del *lemma*, dal quale si trae poi subito il teorema di KAKEYA enunciato al n. 1.

3. Il procedimento indicato al n.° precedente si può estendere agevolmente ad una serie di potenze:

$$\tau(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \tag{6}$$

i cui coefficienti siano reali, positivi e costituiscano una successione non crescente, avente pertanto un limite $a \geq 0$. Posto:

$$a_i - a_{i+1} = b_i \geq 0 \qquad (\text{per } i=0, 1, 2,\dots),$$

segue:

$$a_r - a_{r+s} = \sum_{i=r}^{r+s-1} b_i,$$

e quindi, passando al limite per $s \to \infty$,

$$a_r = a + \sum_{i=r}^{\infty} b_i \qquad (\text{per } r=0, 1, 2,\dots). \tag{7}$$

Se z è ***interno*** al cerchio di convergenza della (6), o è $a>0$, nel qual caso risulta di certo $|z|<1$ e la serie $\sum\limits_{0}^{\infty} z^i$ converge *assolutamente*, avendo per somma $1:(1-z)$; oppure è $a=0$, ed allora — in base alle (7) — non possono le b_i esser tutte nulle. In ogni caso dalle (6), (7) si trae la

$$\tau(z) \equiv a\sum_{r=0}^{\infty} z^r + \sum_{r=0}^{\infty} b_r(1+z+\dots+z^r),$$

e da questa:

$$(1-z)\tau(z) \equiv a + \sum_{r=0}^{\infty} b_r(1-z^{r+1}).$$

Infine, considerando la $\Re[(1-z)\tau(z)]$, si deduce in modo ovvio che:

Nessuno degli zeri di una serie di potenze (6) ***a coefficienti reali positivi e soddisfacenti alle***

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots, \tag{8}$$

che sia interno al suo cerchio di convergenza, può risultare in modulo inferiore all'unità.

Questa proposizione rientra nel seguente teorema generale [1]:

Data una serie di potenze

$$\sigma(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

a coefficienti reali positivi qualsiansi, ed indicato con μ *l'estremo inferiore dei quozienti*

$$\frac{c_0}{c_1}, \quad \frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{c_2}{c_3}, \dots,$$

nessuno zero della $\sigma(z)$ *può in pari tempo cadere all'interno del suo cerchio di convergenza ed all'interno del cerchio ad esso concentrico di raggio* μ.

Per dimostrarlo, basta applicare l'ultima proposizione alla serie $\tau(z) = \sigma(\mu z)$, osservando che i suoi coefficienti

$$a_0 = c_0, \quad a_1 = c_1 \mu, \quad a_2 = c_2 \mu^2 \dots$$

soddisfanno alle (8), in base appunto alla definizione di μ.

4. Un teorema analogo al precedente sussiste per i polinomi. e lo si dimostra in modo consimile, poggiando sul teorema di Kakeya. Poichè, inoltre, colla posizione $z = 1/\zeta$ l'equazione (1) si muta nella

$$a_n + a_{n-1}\zeta + \dots + a_1 \zeta^{n-1} + a_0 \zeta^n = 0,$$

e le condizioni $|\zeta| < a_r : a_{r-1}$ equivalgono alle $|z| > a_{r-1} : a_r$, così nel modo accennato risulta che:

Il modulo ogni radice di un'equazione algebrica (1) *a coefficienti reali positivi, dev'esser compreso fra il minimo ed il massimo dei quozienti:*

$$\frac{a_0}{a_1}, \quad \frac{a_1}{a_2}, \dots, \quad \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

o coincidere con uno di essi [2].

[1] Cfr. S. Kakeya, *On the Zero Points of a Power Series with Positive Coefficients*, « Tôhoku Math. Journ. », t. 3 (1913), p. 23. Occorre però avvertire che il teorema (dato a p. 23) su cui si fonda la dimostrazione di questo A., *non è vero senza eccezioni*, come già ha rilevato Hurwitz nel caso dei polinomi e come risulterà dal n. 5.

[2] Cfr. S. Kakeya, l. c. al n. 1; quivi il teorema suddetto è stabilito direttamente, e poi da esso è dedotto come corollario quello che abbiamo enunciato al n. 1. Il procedimento da noi seguito in questo n.°, trovasi in A. Hurwitz, l. c..

5. Il *lemma* del n. 2 può venir completato, considerando anche il caso che sia $|z|=1$. Si ha allora $|z^{n+1}|=1$, donde $\Re[1-z^{n+1}]\geq 0$, eppertanto la (5) fornisce: $\Re[(1-z)f(z)]\geq 0$. Affinchè in quest'ultima relazione valga il segno di *uguaglianza*, in base alle (4), (5) dev'esser $\Re[1-z^{n+1}]=0$, ossia, in forza della $|z^{n+1}|=1$ risultando $z^{n+1}=1$, il valore di z considerato dev'essere una radice $(n+1)^{ma}$ dell'unità. Escluso il valore $z=1$, che manifestamente non soddisfa alla (1), sia $m>1$ l'esponente a cui appartiene la z: m è un numero primo divisore di $n+1$, e precisamente si abbia

$$n+1=m(m'+1) \qquad \text{(con } m'\geq 0).$$

In tale ipotesi risulta:

$$\Re[1-z^i]\begin{cases} =0 & \text{per } i\equiv 0 \pmod{m} \\ >0 & \text{per gli altri valori di } i, \end{cases}$$

onde *affinchè* $\Re[(1-z)f(z)]$ *si annulli per* $|z|=1$, $z\neq 1$, *occorre e basta che sia:*

$$b_i=0 \qquad \text{per } i\not\equiv 0 \pmod{m}.$$

Queste relazioni, in virtù delle (3), equivalgono alle:

$$a_0=a_1=\ldots=a_{m-1}, \quad a_m=a_{m+1}=\ldots=a_{2m-1},\ldots,$$
$$a_{mm'}=a_{mm'+1}=\ldots=a_n;$$

se esse sono verificate (con $m>1$ intero arbitrario), l'equazione (1) si può scrivere sotto la forma:

$$(9)\qquad f(z)\equiv(a_0+a_mz^m+\ldots+a_{mm'}z^{mm'})(1+z+\ldots+z^{m-1})=0,$$

e quindi ammette come soluzioni le $m-1$ radici m^{me} non uguali ad 1 dell'unità. Si conclude col teorema di Hurwitz (l. c.):

L'equazione algebrica (1), *avente coefficienti reali soddisfacenti alle* (2), *ammette qualche radice di modulo unitario solo quando i suoi coefficienti si possono suddividere in gruppi di* $m>1$ *consecutivi uguali fra loro, per modo che sia:*

$$a_0=a_1=\ldots=a_{m-1}\geq a_m=a_{m+1}=\ldots=a_{2m-1}\geq a_{2m}=a_{2m+1}=\ldots.$$

In tale ipotesi la (1) *ha* $m-1$ *soluzioni di modulo unitario, date precisamente dalle radici* m^{me} *diverse da* 1 *dell'unità, e non ne ha altre se* m *è il massimo intero in corrispondenza al quale la suddivisione indicata è possibile.*

L'ultima parte (che non trovasi in Hurwitz) segue subito dalla (9), ove si osservi che — nelle ipotesi ammesse — l'equazione algebrica

$$a_0+a_m\lambda+\ldots+a_{mm'}\lambda^{m'}=0,$$

e quindi pure quella che da éssa si ottiene ponendo $\lambda = z^m$, non può avere radici di modulo unitario.

Aggiungasi che una proposizione analoga sussiste per le serie di potenze; lasciamo al lettore l'ormai facile *estensione*, che viene a completare il primo teorema del n. 3.

6. Poggiando sul n.° precedente, proveremo ora che:

Data l'equazione algebrica

$$F(z) \equiv -a_0 - a_1 z - \dots - a_r z^r + a_{r+1} z^{r+1} + \\ + a_{r+2} z^{r+2} + \dots + a_n z^n = 0 \quad (con\ 0 \leq \mathrm{r} \leq \mathrm{n} - 1), \tag{10}$$

ove le a son numeri reali positivi soddisfacenti ai due gruppi di limitazioni:

$$a_r \geq a_{r-1} \geq \dots \geq a_1 \geq a_0, \quad a_{r+1} \geq a_{r+2} \geq \dots \geq a_n$$

(di cui le prime o rispettivamente le seconde scompaiono per $\mathrm{r} = 0$ *o per* $\mathrm{r} = \mathrm{n} - 1$*), la* (10) *non ammette radici diverse da* 1 *di modulo unitario, tranne il caso che le equazioni*

$$\begin{aligned} \varphi(z) &\equiv a_r + a_{r-1} z + \dots + a_0 z^r = 0 \\ \psi(z) &\equiv a_{r+1} + a_{r+2} z + \dots + a_n z^{n-r-1} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

soddisfino ambedue alle condizioni espresse dal teorema di HURWITZ, *in corrispondenza ad uno stesso valore dell'intero* $\mathrm{m} > 1$.

Posto $\zeta = 1/z$, dalle (10), (11) si trae:

$$\frac{F(z)}{z^{r+1}} \equiv -\frac{1}{z}\varphi(\zeta) + \psi(z),$$

ond'è:

$$\frac{(1-z)F(z)}{z^{r+1}} \equiv (1-\zeta)\varphi(\zeta) + (1-z)\psi(z).$$

Ma, per $|z| = 1$ e quindi pure $|\zeta| = 1$, risulta (n. 5):

$$\mathfrak{R}[(1-\zeta)\varphi(\zeta)] \geq 0, \quad \mathfrak{R}[(1-z)\psi(z)] \geq 0,$$

eppertanto, affinchè con $|z| = 1$, $z \neq 1$ si abbia $F(z) = 0$, debbono contemporaneamente annullarsi $\mathfrak{R}[(1-\zeta)\varphi(\zeta)]$ ed $\mathfrak{R}[(1-z)\psi(z)]$; da qui, in base al n. 5 segue l'asserto.

7. Presa un'equazione algebrica

$$G(z) \equiv -c_0 - c_1 z - \dots - c_r z^r + c_{r+1} z^{r+1} + \\ + c_{r+2} z^{r+2} + \dots + c_n z^n = 0, \tag{12}$$

ove le c siano numeri reali positivi, poniamo $M = 0$ per $r = 0$ e $\mu = \infty$ per $r = n - 1$, indicando negli altri casi con M il massimo dei rapporti

$$\frac{c_0}{c_1}, \frac{c_1}{c_2}, \dots, \frac{c_{r-1}}{c_r} \qquad (r > 0)$$

e con μ il minimo dei rapporti

$$\frac{c_{r+1}}{c_{r+2}}, \frac{c_{r+2}}{c_{r+3}}, \dots, \frac{c_{n-1}}{c_n} \qquad (r < n-1).$$

Proveremo che:

Supposto $M < \mu$ *(ipotesi che è sempre verificata per* $r = 0$ *o per* $r = n-1$), *il modulo di nessuna radice reale negativa o complessa della* (12) *può esser compreso fra* M *e* μ (1).

Ammesso invero per assurdo che la (12) sia soddisfatta per un valore reale negativo o complesso della z, il cui modulo ρ verifichi la doppia limitazione

$$M < \rho < \mu, \tag{13}$$

possiamo assumere:

$$z = \rho z_0, \quad \text{con} \quad |z_0| = 1, \quad z_0 \neq 1.$$

Con ciò la (12) diventa:

$$-a_0 - a_1 z_0 - \dots - a_r z_0^r + a_{r+1} z_0^{r+1} + a_{r+2} z_0^{r+2} + \dots + a_n z_0^n = 0,$$

ove si ponga $a_i = \rho^i c_i$ (per $i = 0, 1, \dots, n$); ma l'ultima relazione risulta incompatibile col teorema del n. 6, essendo, in base alla (13) ed alle definizioni di M, μ,

$$a_r > a_{r-1} > \dots > a_0, \quad a_{r+1} > a_{r+2} > \dots > a_n.$$

(Di questi due gruppi di limitazioni uno scompare per $r = 0$ o per $r = n-1$, ma allora l'altro è sufficiente per poter concludere anche in tali casi nel modo voluto).

8. Il teorema del n.° precedente si estende senza difficoltà alle serie. Ci limitiamo ad enunciare la proposizione che così si ottiene per $r = 0$.

(1) Cfr. T. Hayashi, *On a Theorem of Mr. Kakeya's*, « Tôkoku Math. Journ. », t. 2 (1912), p. 215. Qui il suddetto teorema è enunciato *solamente per le radici complesse*, e non vi è che un cenno di dimostrazione; un'altra dimostrazione trovasi in Hurwitz, l. c., ma solo nel caso di $r = n-1$ e per le radici complesse.

Va rilevato che un'equazione del tipo (12) non solo può avere radici reali negative, necessariamente in modulo non interne all'intervallo $M \text{---} \mu$, ma può ammettere altresì qualche *radice reale positiva interna a tale intervallo*; basta p. es. considerare l'equazione cubica $-6 - 7z + 3z^2 + z^3 = 0$, avente le radici negative $(-5 \pm \sqrt{13})/2$ é la radice positiva 2, per la quale risulta $M = 6/7$ e $\mu = 3$.

Data la serie di potenze

$$\theta(z) \equiv -a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

ove le a *sono reali positive, e detto* μ *l'estremo inferiore dei rapporti:*

$$\frac{a_1}{a_2}, \ \frac{a_2}{a_3}, \ \frac{a_3}{a_4}, \dots,$$

nessuna radice reale negativa o complessa della $\theta(z)$ *che cada dentro il suo cerchio di convergenza, può in modulo essere inferiore a* μ.

Combinando questo teorema coll'ultimo del n. 3, si ottiene quello enunciato alla fine del n. 1. Ed invero (n. 3), per nessun valore reale negativo o complesso di z, interno al cerchio di convergenza della serie $\Theta(z)$ ivi considerata ed in modulo minore di μ, può annullarsi la serie:

$$\frac{\Theta(z)}{z} \equiv a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots.$$

e quindi neppure si annulla la $\Theta(z)$. Per nessuno dei suddetti valori di z la $\Theta(z)$ può poi assumere un valore a_0, reale e positivo, poichè se no risulterebbe

$$\theta(z) \equiv -a_0 + \Theta(z) = 0,$$

e si contraddirebbe il primo teorema di questo n.°. Infine, se per uno di quei valori di z la $\Theta(z)$ assumesse un valore reale negativo $-a_0$, con $a_0 \geq \mu a_1$, si avrebbe

$$a_0 + \Theta(z) \equiv a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = 0,$$

contrariamente al teorema finale del n. 3 applicato a questa serie, per la quale l'estremo inferiore dei rapporti

$$\frac{a_0}{a_1}, \ \frac{a_1}{a_2}, \ \frac{a_2}{a_3}, \dots$$

varrebbe ancora μ.

Argomentazioni consimili, poggiate sui teoremi dei n.i 4 e 7, provano che:

I valori reali che un polinomio

$$a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

a coefficienti reali positivi, assume in corrispondenza a valori reali negativi o complessi della z, *che in modulo siano inferiori al minimo* μ *dei rapporti*

$$\frac{a_1}{a_2}, \ \frac{a_2}{a_3}, \dots, \ \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

risultano necessariamente negativi ed in valor assoluto minori di μa_1.