Luigi Berzolari

Estensione di un teorema di Bertini-Laguerre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.3, p. 121–123.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_3_121_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1933.

PICCOLE NOTE

Estensione di un teorema di Bertini-Laguerre.

Nota di LUIGI BERZOLARI (a Pavia).

Sunto. - *Si mostra come un teorema di* BERTINI *e* LAGUERRE *sulle curve gobbe di 4° ordine e 2ª specie possa estendersi allo spazio di* n *dimensioni, quando* n *sia dispari.*

Il teorema di cui si tratta, trovato contemporaneamente per via analitica dal BERTINI (1) e, nella forma duale, dal LAGUERRE (2), è il seguente:

Le tre corde principali (intersezioni dei piani osculatori negli estremi) di una curva gobba razionale del quart'ordine concorrono in un punto.

Altre dimostrazioni, sì analitiche che geometriche, ne furono poi date da altri Autori (3), ma non sembra esser stato osservato

(1) *Sulla curva gobba di 4° ordine e 2ª specie*, « Rend. del R. Istituto Lombardo », serie II, vol. 5 (1872), p. 622.

(2) *Recherches analytiques sur la surface réciproque de la surface de Steiner*, « Nouv. Ann. de Math. », serie II, vol. 11 (1872), pp. 319, 337, 418; vol. 12 (1873), p. 55; *Oeuvres de Laguerre*, vol. 2, Paris 1905, p. 281.

(3) La dimostrazione del BERTINI, da lui riprodotta nei *Complementi di geometria proiettiva*, Bologna 1928, pp. 174-175, è ricavata da una particolare rappresentazione parametrica della curva; quella del LAGUERRE dalla teoria degl'invarianti e covarianti delle forme binarie.

Per la copiosa letteratura sull'argomento può vedersi l'articolo del ROHN e mio, *Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen*, nel 3° volume (1926) dell' « Encykl. der math. Wissenschaften » (III, C, 9, Nr. 59, p. 1373). Ai lavori là citati sono da aggiungere questi altri usciti posteriormente: E. CIANI, *Ricerche sopra le quartiche razionali gobbe*, « Rend. del Circ. Mat. di Palermo », vol. 52 (1928), p. 185 e *Introduzione alla geometria algebrica*, lezioni all'Università di Firenze (in litografia, Padova 1931), pp. 224-289; TH. MOHRSCHHEUSER, *Die Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art*, Inaug. Dissertation Bonn (Greifswald 1928). In quest'ultimo il teorema è dimoche esso è una immediata conseguenza di un noto teorema del CREMONA [1], e che così può essere esteso alle curve razionali di ordine $n+1$ dello spazio S_n di n dimensioni, purchè n sia dispari.

Chiamando C una tale curva di S_n, ricordiamo [2] che esistono $n+1$ iperpiani, ognuno dei quali ha con C un contatto $(n+1)$-punto; che da ogni punto P di C partono n iperpiani (osculatori) aventi altrove con C un contatto n-punto, e che gli n punti di contatto stanno in un iperpiano passante per P.

Gli ∞^1 iperpiani ottenuti al variare di P sono tali che due ne passano per un punto arbitrario di C: i due contenenti i punti di contatto degli iperpiani osculatori che escono da questo punto oppure dall'ulteriore intersezione di C con l'iperpiano osculatore nel punto stesso. Quegli iperpiani inviluppano dunque un cono quadrico, avente per vertice un certo S_{n-3}.

Ora, considerando i punti uniti della corrispondenza $(n^2, 1)$, quadrato della corrispondenza $(n, 1)$ che ha luogo tra un punto P di C e l'ulteriore intersezione di C con l'iperpiano osculatore in P, e levandone gli $n+1$ punti che sono di contatto per gl'iperpiani a contatto $(n+1)$-punto, risulta che le « corde principali » di C (rette congiungenti due punti della curva e poste negli iperpiani osculatori nei punti stessi) sono in numero di $\frac{n(n-1)}{2}$ [3].

Se X e Y sono i punti d'appoggio di una di esse, tra gli iper-

strato con i metodi della teoria degli invarianti; nei due primi, come pure in ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. III, Bologna 1924, pp. 217-219, esso è dedotto dalla considerazione delle tre involuzioni rigate che trasformano la curva in sè. Appunto questa considerazione aveva già permesso di estendere il teorema alle curve gobbe razionali di ordine n, dotate di quattro « punti d'iperosculazione » (in ognuno dei quali il piano osculatore ha con la curva un contatto n-punto), quando n fosse un multiplo di 4: vedasi la mia Nota: *Sulle curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculazione*, « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », vol. 24 (1907), p. 1. Cfr. pure il citato articolo di ROHN e mio, Nr. 57, p. 1369.

[1] *Intorno alla curva gobba del quart'ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado*, « Ann. di Mat. », serie I, vol. 4 (1862), p. 71; *Opere mat.*, vol. 1, Milano 1914, p. 279 (§§ 17 e 19).

[2] V. per es. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2ª ed., Messina 1923, pp. 351-352.

[3] Nel lavoro di F. SEVERI, *Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio*, « Mem. dell'Acc. di Torino », serie II, vol. 51 (1901), p. 81 (n. 3) è determinato il numero delle corde principali per una curva iperspaziale di genere qualunque.

piani per X osculatori altrove, uno avrà il punto di contatto in Y e gli altri in punti $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$; e tra gli iperpiani per Y osculatori altrove uno avrà il punto di contatto in X e i rimanenti in punti $X_1, \ldots, X_{n-1}$, che tutti saranno diversi dai punti $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$, altrimenti X e Y coinciderebbero. Perciò i due iperpiani passanti per $X, Y, X_1, \ldots, X_{n-1}$ e per $X, Y, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ sono distinti. L'S_{n-2} in cui essi si tagliano contiene tanto la corda XY quanto l'S_{n-3} di cui si è detto sopra, quindi la XY incontra l'S_{n-3} in un punto.

D'altra parte le corde di C incidenti ad un S_{n-3} sono $\frac{n(n-1)}{2}$, come si riconosce proiettando C dall'S_{n-3} sopra un piano generico. Perciò:

Una curva razionale d'ordine $n+1$ *di* S_n *possiede* $\frac{n(n-1)}{2}$ *corde principali, le quali, quando* n *sia dispari, sono tutte incidenti a un determinato* S_{n-3}.