Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Carlo Brunè

Sullo sviluppo in serie di una funzione di variabile complessa in prossimità di un punto critico trascendente

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.2, p. 85–89.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_2_85_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1933.

Sullo sviluppo in serie di una funzione di variabile complessa in prossimità di un punto critico trascendente.

Nota di CARLO BRUNÈ (a Ferrara).

Sunto. - *Si ricavano alcuni sviluppi in serie, procedenti per potenze intere positive di una funzione ad infiniti valori (detta sviluppatrice); i quali sviluppi forniscono gli infiniti valori di una funzione data, in prossimità di un suo punto critico trascendente.*

1. È ben nota la formula che dà i valori di una funzione nell'intorno di un suo punto critico algebrico a, attorno al quale si permutano n rami, per mezzo di uno sviluppo in serie di potenze di $(z-a)^{\frac{1}{n}}$.

Come parziale estensione di questa formula al caso che a sia punto critico trascendente, esprimerò la funzione data $f(z)$ per mezzo di una serie procedente per potenze intere positive di una certa funzione di z (che chiameremo *sviluppatrice*), la quale si dirama infinitamente attorno ad a, serie convergente in tutti i punti z interni ad un cerchio di centro a, tale punto al più escluso.

Quest'asserzione ha bisogno di essere chiarita. Dicendo che la serie converge nell'interno del cerchio, intendo dire che in ogni punto z essa, in corrispondenza degli infiniti valori che nello stesso punto assume la funzione sviluppatrice, fornisce tutti gli infiniti valori che quivi assume la $f(z)$. L'affermazione che la serie converge in tutti i punti interni, eccetto al più il centro del cerchio, non è contraddittoria col fatto che una serie di potenze converge uniformemente in tutti i punti interni al cerchio di convergenza, perchè vedremo che la funzione sviluppatrice trasforma il campo in cui la serie converge, in un cerchio che ha sulla circonferenza il punto trasformato del punto critico (1). Il punto della Riemanniana nel quale vanno calcolate le derivate successive che servono per la costruzione dei coefficienti della serie, *non può quindi coincidere col punto critico* a.

Nel n.° 3 darò un altro sviluppo in serie, convergente in un anello circolare circondante il punto a, anello il cui cerchio minore può esser fatto piccolo a piacere. Per alcune applicazioni pratiche questo secondo sviluppo potrà essere più utile del primo.

Per la validità di tutti gli sviluppi occorrerà che la $f(z)$ soddisfi ad una sola condizione poco restrittiva.

2. Per semplicità supporremo che il punto critico trascendente sia nell'origine. La condizione alla quale dovrà soddisfare la $f(z)$ è la seguente: che esista un cerchio di centro $z=0$ e raggio $R>0$ tale che, qualunque sia il punto che si prende interno ad esso, e qualunque sia il foglio della Riemanniana su cui si immagina deposto il punto scelto (purchè il foglio appartenga all'aggregato degli infiniti fogli che si congiungono in $z=0$), non si ottenga mai nè un punto singolare, nè un punto critico, all'infuori di $z=0$ (2).

Supponiamo che sia $R>1$ (in caso contrario potremmo sostituire alla variabile z una nuova variabile $z'=z\cdot\lambda$, con λ positivo opportunamente scelto, ed invece della $f(z)$ considerare la funzione $f_1(z')=f\left(\frac{z'}{\lambda}\right)$, che ha le stesse proprietà della $f(z)$). Descriviamo il cerchio di centro $z=0$ e raggio R. Esso, considerato come projezione di un'elica avente passo infinitesimo e facente infiniti giri attorno all'origine, in ambedue i versi, stacca dalla Riemanniana un campo che chiameremo (γ). Eseguiamo allora la trasformazione: $z_1=\log\frac{z}{R}$. Il campo (γ) viene mutato nel semipiano sinistro del piano z_1, in modo che al punto $z=0$ viene a corrispondere il punto $z_1=\infty$, che fa parte del contorno del semipiano stesso.

Trasformiamo poi il semipiano suddetto nel cerchio unitario (cioè avente per centro l'origine e per raggio l'unità) del piano t

(1) Ciò deriva dalla proprietà che un punto critico trascendente di una funzione $f(z)$ non può essere considerato interno alla Riemanniana della $f(z)$. (Cfr. ad es. OSGOOD: *Lehrbuch der Funktiontheorie*, Vol. I, 5ª ed. pag. 376). Perciò i punti critici trascendenti sotto certi rispetti hanno comportamento assai diverso dagli algeorici.

(2) Si potrebbe dire brevemente che $z=0$ è un punto critico *isolato*.

mediante la funzione:

$$t = \frac{\log R + z_1}{\log R + z_1} \quad \text{da cui} \quad t = \frac{\log z}{2 \log R - \log z}.$$

È facile riconoscere che la seconda di queste formule dà la rappresentazione biunivoca e conforme del campo (γ) sul cerchio unitario del piano t. Passiamo quindi a considerare la funzione:

$$f(z) = f\left(R^{\frac{2t}{1+t}}\right) = \varphi(t)$$

$\left(\text{si osservi che } z = R^{\frac{2t}{1+t}} \text{ è la funzione inversa della } t = \frac{\log z}{2 \log R - \log z}\right)$. Poichè la $f(z)$ è regolare in (γ), (origine al più esclusa) e la funzione $z = R^{\frac{2t}{1+t}}$ è regolare nel cerchio unitario, ne viene che la $\varphi(t)$ è pure regolare in esso, e quindi è sviluppabile nella seguente serie di potenze di t, che ammette un cerchio di convergenza certo non minore del cerchio unitario:

$$\text{(a)} \qquad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

Questo sviluppo si può anche scrivere:

$$\text{(b)} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[D^{(n)} f\left(R^{\frac{2t}{1+t}}\right)\right]_{t=0}}{n!} \cdot \left(\frac{\log z}{2 \log R - \log z}\right)^n$$

che è la formula che volevamo stabilire. Questa serie converge in tutto (γ) (origine al più esclusa). I suoi coefficienti sono indipendenti dal foglio su cui si immagina deposto il punto scelto. Gli infiniti valori della $f(z)$ in uno stesso punto z_0 si ottengono in corrispondenza degli infiniti valori di $\log z_0$.

Si osservi che, se la serie (a) converge nel punto $t = -1$ che corrisponde al punto critico $z = 0$, la serie (b) converge anche nel punto $z = 0$ stesso, e la $f(z)$ è quivi continua (ma ha necessariamente derivata nulla od infinita).

3. Ferma restando la condizione alla quale deve soddisfare la $f(z)$, invece di prendere come uniformizzante locale la funzione $\log z$, che dà origine alla funzione sviluppatrice $\frac{\log z}{2 \log R - \log z}$, si può prendere un'altra funzione che si dirami infinitamente attorno all'origine; ad es. la funzione $z_1 = z^{i\alpha}$, con α reale. Come si sa, questa funzione è ad infiniti rami, permutantisi attorno al punto $z = 0$.

Ora, se ponessimo $z_1 = z^{i\alpha}$, la rappresentazione del campo (γ) sul piano z_1 non risulterebbe biunivoca, perchè ad un punto qualsiasi z_1 corrispondono infiniti punti z che sono tutti allineati coll'origine, ed i cui moduli costituiscono una progressione geometrica di ragione $e^{2\pi}$; di cosiffatti punti ve ne è quindi sempre un'infinità entro qualunque cerchio del piano z avente per centro l'origine. Per ristabilire la biunivocità è allora necessario, invece del campo (γ), prendere sulla Riemanniana quel campo (γ') che corrisponde sul piano z ad una corona circolare avente il centro nell'origine, e tale che il rapporto dei due raggi sia minore di $e^{2\pi}$. Ad es. possiamo prendere i raggi p e q $(p > q)$ dei due cerchi in modo che sia $\log p = \frac{\pi}{2\alpha}$ e $\log q = -\frac{\pi}{2\alpha}$. Se questa condizione non potesse essere soddisfatta sul piano z, basterebbe porre $z' = \lambda z$, con λ positivo opportunamente scelto, ed invece della funzione $f(z)$ considerare la $f_1(z') = f\left(\frac{z'}{\lambda}\right)$. In tal modo l'unica condizione cui deve soddisfare la corona circolare, è che *il rapporto dei raggi sia eguale ad* e^{π}.

Premesso questo, essendo $\log p = \frac{\pi}{2\alpha}$ e $\log q = -\frac{\pi}{2\alpha}$, il campo (γ') della Riemanniana relativo ai due cerchi della corona considerata viene rappresentato per mezzo della funzione $z_1 = z^{i\alpha}$ in modo biunivoco e conforme sul semipiano destro del piano z_1; al punto $z = 0$ viene a corrispondere il punto $z_1 = \infty$, che appartiene al contorno del campo trasformato. Eseguiamo infine la sostituzione:

$$t = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1} \qquad \text{da cui} \qquad t = \frac{z^{i\alpha} - 1}{z^{i\alpha} + 1}.$$

Poichè la prima di queste formule trasforma il semipiano considerato nell'interno del cerchio unitario del piano t, ne risulta che la seconda formula dà la rappresentazione biunivoca e conforme del campo (γ') nel cerchio suddetto. La formula inversa è:

$$z = \left(\frac{1 - t}{1 + t}\right)^{\frac{i}{\alpha}}. \tag{1}$$

Consideriamo ora la funzione:

$$f(z) = f\left[\left(\frac{1 - t}{1 + t}\right)^{\frac{i}{\alpha}}\right] = \varphi(t).$$

Poichè la $f(z)$ è regolare in (γ'), e la (1) è regolare nel cerchio unitario del piano t, ne viene che la la $\varphi(t)$ è regolare in questo cerchio. Potremo quindi svilupparla in serie di potenze di t:

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\,t^n$$

ed il cerchio di convergenza di questa serie è non minore del cerchio unitario. Lo sviluppo precedente si può anche scrivere:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left\{D^{(n)}f\left[\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{\frac{i}{\alpha}}\right]\right\}_{t=0}}{n!}\left(\frac{z^{i\alpha}-1}{z^{i\alpha}+1}\right)^n.$$

Questa è la formula che volevamo stabilire. La serie del 2° membro converge nel campo (γ'). I coefficienti dipendono unicamente dal numero α prefissato.

Come caso particolare, facendo $\alpha=1$ si ottiene la formula più semplice:

$$\text{(c)}\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left\{D^{(n)}f\left[\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{i}\right]\right\}_{t=0}}{n!}\left(\frac{z^{i}-1}{z^{i}+1}\right)^n.$$

Applicazione. — Prendiamo la funzione $f(z)=\log z$; applicando lo sviluppo (c) si ha:

$$\log z=-2i\left\{\frac{z^i-1}{z^i+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{z^i-1}{z^i+1}\right)^3+\ldots\right\}.$$

Per controllo, ponendo $z^i=Z$ e quindi $z=Z^{-i}$, avremo il noto sviluppo:

$$\log Z=2\left\{\frac{Z-1}{Z+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^3+\ldots\right\}$$

valido nel semipiano destro.