
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PIERO BUZANO

Studio di una corrispondenza fra due coniche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **12** (1933), n.2, p. 80–85.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_2_80_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_2_80_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_2_80_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Studio di una corrispondenza fra due coniche.

Nota di PIERO BUZANO (a Torino).

Sunto. - *Un invariante proiettivo differenziale simultaneo di due curve piane mi conduce alla considerazione di una corrispondenza fra le due curve: studio questa corrispondenza nel caso in cui le due curve sono coniche e la caratterizzo geometricamente.*

A ogni coppia di elementi del 2° ordine, appartenenti rispettivamente a due curve piane γ_1 e γ_2 , non rette, è connesso un in-

variante proiettivo I ⁽¹⁾ che nel caso più generale fu considerato per la prima volta da C. BOUTON ⁽²⁾. Ove si indichino con:

$$y_1 = y_1(x_1); \quad y_2 = y_2(x_2)$$

le equazioni di γ_1 e γ_2 ⁽³⁾ esso assume la seguente espressione:

$$I = \frac{y_1''(x_1) [y_2(x_2) - y_1(x_1) - y_2'(x_2)(x_2 - x_1)]^3}{y_2''(x_2) [y_2(x_2) - y_1(x_1) - y_1'(x_1)(x_2 - x_1)]^3}.$$

In generale I non sarà costante quando x_1 e x_2 variano in modo qualunque e quindi due coppie di elementi del 2° ordine, i quali appartengano l'uno a γ_1 e l'altro a γ_2 , non saranno in generale proiettive fra loro: perchè lo siano, occorre e basta che gli elementi che le compongono siano omologhi nella corrispondenza (fra γ_1 e γ_2) di equazione:

$$(*) \quad \frac{y_1''(x_1) [y_2(x_2) - y_1(x_1) - y_2'(x_2)(x_2 - x_1)]^3}{y_2''(x_2) [y_2(x_2) - y_1(x_1) - y_1'(x_1)(x_2 - x_1)]^3} = c$$

(c costante; variabili x_1, x_2).

Se eccezionalmente quest'equazione è identica, non è più determinata alcuna corrispondenza e due coppie di elementi del 2° ordine sono sempre proiettive fra loro.

Il BOUTON nel lavoro citato dimostra che, quando γ_1 e γ_2 coincidono, cioè quando i due elementi del 2° ordine appartengono ad una medesima curva, se I ha sempre lo stesso valore qualunque sia la coppia di elementi che si considera, la curva è una conica. In tal caso la (*) si riduce a $c = -1$ e non determina più la corrispondenza. Ora, data la natura infinitesimale della questione, si può presumere che non vi siano altre eccezioni, vale a dire che

⁽¹⁾ Il computo dei parametri non lascia prevedere questo risultato poichè una coppia di elementi del 2° ordine dipende, come un'omografia piana, da 8 parametri.

⁽²⁾ CHARLES BOUTON, « Bull. Amer. Math. Soc. », 4 (1898), p. 313. Questo invariante era però già stato considerato, come invariante di contatto, nel caso particolare di una coppia di elementi del 2° ordine fra loro tangenti (cfr. G. FUBINI et E. CECIL, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*. Chap. II, 7).

⁽³⁾ Indico rispettivamente con x_1, y_1 e x_2, y_2 le coordinate correnti su γ_1 e γ_2 , pur intendendo di aver riferito le due curve ad uno stesso sistema cartesiano o proiettivo. Inoltre supporrò adirittura che γ_1 e γ_2 siano curve analitiche.

quando γ_1 e γ_2 sono distinte, la corrispondenza sia sempre determinata ⁽¹⁾.

Voglio qui soffermarmi sullo studio della corrispondenza rappresentata dalla (*) nel caso in cui le curve γ_1 e γ_2 sono due coniche (distinte). Se esse hanno le seguenti equazioni:

$$\gamma_1) \quad f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$\gamma_2) \quad g(x, y) \equiv b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0$$

di cui indichiamo i discriminanti rispettivamente con A e B , si

(¹) Infatti lo si può verificare nel seguente modo. Posto nella (*) $x_2 = x_1 + h$, sviluppando in serie di potenze h si ha:

$$\frac{y_1''(x_1)}{y_2''(x_1) + y_2'''(x_1)h + \dots} \left[\frac{y_2(x_1) - y_1(x_1) - \frac{1}{2}y_2''(x_1)h^2 - \dots}{y_2(x_1) - y_1(x_1) + |y_2'(x_1) - y_1'(x_1)|h + \frac{1}{2}y_2''(x_1)h^2 + \dots} \right]^2 = c,$$

e, supposte distinte le due curve, cioè $y_2(x_1) - y_1(x_1) \neq 0$ si ha ancora:

$$\frac{y_1''(x_1)}{y_2''(x_1) + y_2'''(x_1)h + \dots} \left[1 - 3 \frac{y_2'(x_1) - y_1'(x_1)}{y_2(x_1) - y_1(x_1)} h + \dots \right] = c.$$

Noi vogliamo escludere che questa sia un'identità in h : se lo fosse si dovrebbe avere in particolare:

$$c \frac{y_2''}{y_1''} = 1;$$

$$c \frac{y_2'''}{y_1''} = -3 \frac{y_2' - y_1'}{y_2 - y_1};$$

ma dalla 1^a, non potendo essere $c=0$, si ricava: $y_2 = \frac{1}{c}y_1 + \alpha x_1 + \beta$, dove α e β sono costanti arbitrarie, e sostituendo nella 2^a questo valore di y_2 e riducendo a forma intera si ottiene:

$$(y_1 y_1''' + 3y_1' y_1'') \frac{1-c}{c} + (x_1 y_1''' + 3y_1'')x + y_1''' \beta = 0$$

la quale è una relazione lineare a coefficienti costanti fra 3 funzioni di x_1 : dovrebbe quindi essere nullo il loro Wronskiano, vale a dire, come si vede facilmente, dovrebbe essere verificata l'equazione:

$$9y_1''y_1^{iv} - 45y_1''y_1'''y_1^{iv} + 40y_1'''^3 = 0$$

la quale, come è noto, esprime che γ_1 è una conica. Lo stesso si potrebbe dire per γ_2 .

Dunque eventuali eccezioni si potrebbero avere solo se le due curve sono coniche: ma in tal caso che la corrispondenza sia sempre determinata (se le 2 coniche sono distinte) risulta dallo studio della corrispondenza stessa fatto qui in seguito.

ottiene:

$$y_1' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}}{a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}}; \quad y_2' = -\frac{g_x}{g_y} = -\frac{b_{11}x_2 + b_{12}y_2 + b_{13}}{b_{12}x_2 + b_{22}y_2 + b_{23}},$$

e, derivando queste, con facile calcolo:

$$y_1'' = \frac{A}{(a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23})^3}; \quad y_2'' = \frac{B}{(b_{12}x_2 + b_{22}y_2 + b_{23})^3}.$$

Sostituendo questi valori nell'equazione (*) della corrispondenza, essa diventa:

$$\frac{A}{B} \left(\frac{b_{12}x_2 + b_{22}y_2 + b_{23}}{a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}} \right)^3 \left[\frac{y_2 - y_1 + \frac{b_{11}x_2 + b_{12}y_2 + b_{13}}{b_{12}x_2 + b_{22}y_2 + b_{23}}(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1 + \frac{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}}{a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}}(x_2 - x_1)} \right]^3 = c,$$

cioè:

$$-\frac{A}{B} \frac{M^3}{L^3} = c,$$

avendo posto:

$$M = -(b_{11}x_2^2 + 2b_{12}x_2y_2 + b_{22}y_2^2 + b_{13}x_2 + b_{23}y_2) + \\ + b_{11}x_1x_2 + b_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + b_{22}y_1y_2 + b_{13}x_1 + b_{23}y_1,$$

vale a dire (tenuto presente che x_2 e y_2 soddisfano l'equazione di γ_2):

$$M = b_{11}x_1x_2 + b_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + b_{22}y_1y_2 + b_{13}(x_1 + x_2) + b_{23}(y_1 + y_2) + b_{33},$$

e analogamente

$$L = a_{11}x_1x_2 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{22}y_1y_2 + a_{13}(x_1 + x_2) + a_{23}(y_1 + y_2) + a_{33}.$$

Quest'equazione si scinde in tre che, posto $\lambda = \omega \sqrt[3]{\frac{B}{A}}$ (dove ω è una qualunque delle radici cubiche dell'unità), assumono la seguente forma:

$$(\lambda a_{11} + b_{11})x_1x_2 + (\lambda a_{12} + b_{12})(x_1y_2 + x_2y_1) + (\lambda a_{22} + b_{22})y_1y_2 + \\ + (\lambda a_{13} + b_{13})(x_1 + x_2) + (\lambda a_{23} + b_{23})(y_1 + y_2) + \lambda a_{33} + b_{33} = 0.$$

Questa è l'equazione della corrispondenza: essa dice che *si corrispondono quei punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) di γ_1 e γ_2 , i quali sono coniugati rispetto alla conica γ_0 di equazione:*

$$\lambda f(x, y) + g(x, y) = 0$$

appartenente al fascio di γ_1 e γ_2 . Vale a dire: ad ogni punto di γ_1 (di γ_2) corrispondono su γ_2 (su γ_1) le due intersezioni con la sua polare rispetto a γ_0 . La corrispondenza fra γ_1 e γ_2 è dunque una corrispondenza algebrica (2, 2).

Per caratterizzarla geometricamente in modo completo farò ancora vedere qual'è il legame fra il valore c dell'invariante e la posizione della conica γ_0 nel fascio considerato, dimostrando che *il prodotto dei tre birapporti formati da γ_2 , γ_1 , γ_0 con ciascuna delle tre coniche degeneri del loro fascio è uguale a $-c$* . Detti infatti τ_1 , τ_2 , τ_3 questi birapporti e detti μ_1 , μ_2 , μ_3 i tre valori del parametro corrispondenti alle coniche degeneri, si ha:

$$\tau_1\tau_2\tau_3 = (0, \infty, \lambda, \mu_1)(0, \infty, \lambda, \mu_2)(0, \infty, \lambda, \mu_3) = \frac{\lambda^3}{\mu_1\mu_2\mu_3},$$

ma μ_1 , μ_2 , μ_3 sono radici dell'equazione di 3° grado:

$$|\mu a_{rs} + b_{rs}| \equiv A\mu^3 + P\mu^2 + Q\mu + B = 0$$

e quindi si ha: $\mu_1\mu_2\mu_3 = -\frac{B}{A}$; d'altra parte si era posto $\lambda = \omega \sqrt[3]{c \frac{B}{A}}$ e quindi tenendo conto di questi valori si ottiene:

$$\tau_1\tau_2\tau_3 = -c,$$

la quale, come si voleva dimostrare, data γ_0 definisce geometricamente il corrispondente valore di c .

Infine segnalerò ancora i seguenti casi particolari notevoli.

Se è $c=0$ e quindi $\lambda=0$, la conica γ_0 coincide con γ_2 e si ha la ben nota corrispondenza algebrica (2, 2) ottenuta associando a ogni punto di γ_1 i due punti di contatto delle tangenti condotte da esso alla conica γ_2 . Analogamente per $c=\infty$, scambiate fra loro γ_1 e γ_2 .

Se poi la conica γ_0 è una conica degenera del fascio individuato da γ_1 e γ_2 , e precisamente degenera in una coppia di rette distinte, le coppie di punti di γ_2 che corrispondono ai punti di γ_1 variano in un'involuzione J_2 , e così pure le coppie di punti di γ_1 che corrispondono ai punti di γ_2 variano in un'involuzione J_1 : anzi si vede facilmente che ai due punti di una coppia di J_1 (di J_2) corrisponde una medesima coppia di J_2 (di J_1) e quindi la corrispondenza si può considerare come una corrispondenza (1, 1) fra le coppie delle due involuzioni J_1 e J_2 .

Se infine la conica γ_0 degenera in una coppia di rette coincidenti (per il che occorre che γ_1 e γ_2 siano bitangenti o abbiano contatto quadripunto) ai punti di γ_1 (di γ_2) corrispondono due punti fissi di γ_2 (di γ_1): la corrispondenza è degenera. Ma in questo caso, in cui γ_1 e γ_2 sono bitangenti oppure hanno contatto quadripunto, anche se γ_0 non è degenera, la corrispondenza è di tipo particolare poichè è sempre riducibile a corrispondenze proiettive. Per vederlo

basta assumere rispettivamente, per γ_1 e γ_2 , secondo che sono bitangenti o hanno contatto quadripunto, le seguenti equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1) \quad y = x^2 \\ \gamma_2) \quad y = hx^2 \end{array} \right.; \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1) \quad y = x^2 \\ \gamma_2) \quad y = x^2 + h \end{array} \right.$$

e si trova facilmente che l'equazione della corrispondenza si spezza rispettivamente in equazioni del tipo:

$$\frac{x_2}{x_1} = \text{cost.}; \quad x_2 - x_1 = \text{cost.}$$

che rappresentano appunto corrispondenze proiettive.