Luigi Conte

Su una classe particolare di superficie rigate

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.2, p. 77–80.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_2_77_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1933.

Su una classe particolare di superficie rigate.

Nota di LUIGI CONTE (a Cagliari).

Sunto. - *L'A. determina le superficie rigate per le quali esiste una relazione lineare a coefficienti costanti tra* r, s, t, *generalizzando così un risultato del* CHIELLINI *relativo alle rigate armoniche* (r + t = 0).

1. Esistono superficie rigate che, rispetto ad un determinato sistema cartesiano, soddisfino alla relazione:

$$(\alpha) \qquad r + 2\mu s + \nu t = 0 \ \text{(1)?} \qquad (\mu, \nu \text{ costanti}).$$

Il problema per $\mu = 0$, $\nu = 1$ è stato risoluto dal CHIELLINI (2), il quale è arrivato al risultato che « *tutte e sole le superficie rigate armoniche sono il piano, un paraboloide iperbolico, (coll'asse parallelo all'asse delle z)* (3), *l'elicoide rigato ad area minima ed ogni loro combinazione lineare* ».

(1) Nella (α) alla r abbiamo dato per coefficiente *1* invece d'una costante qualunque λ; ciò equivale evidentemente a supporre detto coefficiente $\neq 0$ e può sempre raggiungersi mediante una sostituzione lineare variabile x, y.

(2) Vedi « Bollettino Unione Matematica Italiana », n. 4, ottobre 1932.

(3) Colgo l'occasione per precisare, secondo quanto mi fa osservare il prof. B. LEVI, che bisogna dire: « *paraboloide iperbolico (coll'asse parallelo all'asse delle z) avente fra loro ortogonali le giaciture delle rette improprie* » - A. CHIELLINI.

2. Consideriamo una rigata qualunque rappresentata parametricamente da:

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(x, y, \tau) &= mx + a - y = 0 \\ \varphi(x, z, \tau) &= nx + b - z = 0 \end{aligned}$$

ove m, n, a, b sono funzioni del parametro τ finite e continue colle derivate prime e seconde nell'intervallo che si considera; poichè il problema ha senso soltanto per superficie che non siano cilindri a generatrici parallele all'asse z, si deve supporre

$$(2)\qquad m'x + a' \neq 0.$$

Osserviamo che nelle (1) i coefficienti rispettivi della y e della z li abbiamo posti uguali ad 1, e questo è sempre possibile giacchè, sempre per l'esclusione dei cilindri a generatrici parallele all'asse delle z, si può sempre supporre, previa una sostituzione lineare sulle variabili x, y, che il piano passante per la generatrice generica della superficie e parallelo all'asse delle z non sia parallelo all'asse delle y.

Con semplici calcoli che si possono vedere nella citata Nota si ottiene:

$$(3)\qquad \begin{cases} r = \dfrac{-2mn'}{m'x+a'} + \dfrac{m^2(n''x+b'')}{(m'x+a')^2} + \dfrac{m(n'x+b')\{2m'(m'x+a') - m(m''x+a'')\}}{(m'x+a')^3} \\[2ex] s = \dfrac{n'}{m'x+a'} - \dfrac{m(n''x+b'')}{(m'x+a')^2} + \dfrac{(n'x+b')\{-m'(m'x+a') + m(m''x+a'')\}}{(m'x+a')^3} \\[2ex] t = \dfrac{n''x+b''}{(m'x+a')^2} - \dfrac{(n'x+b')(m''x+a'')}{(m'x+a')^3}. \end{cases}$$

Sostituendo nella condizione (α), otteniamo un'equazione di secondo grado in x che deve naturalmente ridursi ad un'identità.

Posto:

$$(4)\qquad k = m^2 - 2\mu m + \nu\,; \quad k' = 2(m - \mu),$$

dovrà perciò essere:

$$(5)\qquad \begin{cases} k\cdot(m'n'' - m''n') = 0 \\ k[(b'm'' - b''m') + (a'n'' - a'n'')] = k'm'(b'm' - a'n') \\ k(a'b'' - a''b') + k'a'(b'm' - a'n') = 0. \end{cases}$$

3. Distinguiamo due casi a seconda che m è o non costante.

Se m è una costante (che non annulli k) dovendo per la (2) essere $a' \neq 0$, potremo per semplicità assumere a come parametro τ onde le (5) diventano:

$$(6)\qquad n'' = 0, \quad kb'' = k'n'$$

e danno

$$n = n_1 a + n_2\,; \quad b = \frac{n_1 k'}{2k} a^2 + b_1 a + b_2 \qquad (n_1,\ n_2,\ b_1,\ b_2 \text{ costanti}).$$

Sostituendo in (1) ed eliminando il parametro a otteniamo la superficie:

$$(7)\ z = \frac{mn_1(mk'-2k)}{2k} x^2 + \frac{k'n_1}{2k} y^2 + \frac{n_1(k-mk')}{k} xy + (n_2 - b_1 m)x + b_1 y + b_2$$

che è un paraboloide coll'asse parallele all'asse delle z.

Se $k = 0$ ha radici reali ρ_1 e ρ_2 e per valore costante di m prendiamo ρ_i le (5) diventano (per $\rho_1 \neq \rho_2$)

$$n' = 0$$

cioè insieme con m è costante anche n, e, posto $b = f(a)$, funzione arbitraria del parametro a, otteniamo le rigate

$$(8) \qquad z = nx + f(y - \rho_i x).$$

Se fosse $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ed assumessimo per m il valore costante ρ, le (5) sarebbero identicamente verificate e tutte le rigate

$$y = \rho x + a, \quad z = g(a)x + f(a)$$

e cioè

$$z = xg(y - \rho x) + f(y - \rho x)$$

verificherebberò la (α). Sono conoidi a piano direttore parallelo all'asse z in cui (8) rientra come caso particolare.

4. Se la m non è costante, assumiamola come parametro e così le (5) diventano:

$$(9) \qquad \begin{aligned} n'' = 0\,; \quad & k(b'' - a''n') + k'(b' - a'n') = 0 \\ & k(a'b'' - a''b') + k'a'(b' - a'n' = 0) \end{aligned}$$

onde

$$n = n_1 m + n_2$$

e

$$a'' = 0, \quad a = a_1 m + a_2, \quad b = a_1 n_1 m + b_1 \int \frac{dm}{k} + b_2$$

oppure

$$b' = n_1 a', \quad b = na + b_2, \qquad (n_1,\ n_2,\ a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \text{ costanti}).$$

A seconda che è $\Delta = 4(\mu^2 - \nu) \lesseqgtr 0$ (1), l'integrale $\int \frac{dm}{k}$ equivale a

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log \frac{k' - \sqrt{\Delta}}{k' + \sqrt{\Delta}}, \quad \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{k'}{\sqrt{-\Delta}}.$$

(1) Studieremo a parte il caso $\Delta = 0$.

Sostituendo in (1) ed eliminando il parametro $m = \frac{y - a_2}{x + a_1}$ otteniamo le superfici

$$(10) \quad z = n_1(y - a_2) + n_2x + b_2 + \frac{b_1}{\sqrt{\Delta}} \log \frac{2(y - a_2) - (2\mu + \sqrt{\Delta})(x + a_1)}{2(y - a_2) - (2\mu - \sqrt{\Delta})(x + a_1)}$$

$$(11) \quad z = n_1(y - a_2) + n_2x + b_2 + \frac{2b_1}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2(y - a_2) - 2\mu(x + a_1)}{\sqrt{-\Delta}(x + a_1)}$$

la quale ultima ove si ponga $n_1 = n_2 = b_2 = 0$ è una deformata affine dell'elicoide rigato di area minima a piano direttore parallelo al piano xy.

Se fosse $b = n_1a + b_2$ si ottiene il piano

$$z = n_2x + n_1y + b_1.$$

5. Se $\Delta = 0$ si ha

$$\int \frac{bm}{k} = \int \frac{dm}{(m - \mu)^2} = \frac{1}{m - \mu}$$

e, sostituendo si ottiene il paraboloide non più ad asse parallelo dell'asse z,

$$(12) \quad [n_1(y - a_2) + n_2x - z]\,[(y - a_2) - \mu(x + a_1)] + b_1(x + a_1) = 0.$$

Concludendo possiamo dire: *Tutte e sole le superficie rigate che soddisfano alla condizione* (α) *sono il piano, un paraboloide* (7) (*coll'asse parallelo all'asse delle* z); inoltre, a seconda che Δ è < 0 o > 0 ovvero $= 0$, *una deformata affine dell'elicoide rigato ad area minima* (*a piano direttore parallelo al piano* xy)*; o una superficie della forma*

$$z = \log(2y - (2\mu + \sqrt{\Delta})x + c_1) - \log(2y - (2\mu - \sqrt{\Delta})x + c_2)$$

ovvero un paraboloide (12); e se $\Delta \geq 0$ *una classe di conoidi a piano direttore parallelo all'asse* z*; infine ogni combinazione lineare delle predette superfici.*