BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

GIUSEPPE USAI

Sopra equazioni integrali di nucleo $x - y$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.2, p. 72–77.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_2_72_0>

Sopra equazioni integrali di nucleo $x - y$.

Nota di Giuseppe Usai (a Catania).

Sunto. - *Vien data una nuova dimostrazione di un teorema dell'Autore con riferimento ad una teoria della* sig.ª Editta Pini: *seguono poi considerazioni e applicazioni pratiche.*

1. In una mia Nota [1] ho dimostrato che se $\varphi(x)$ è soluzione della:

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda\int_0^x (x - y)\varphi(y)dy \tag{1}$$

ove λ sia costante e se $f(0) = 0$, l'equazione:

$$f'(x) = \psi(x) - \lambda\int_0^x (x - y\psi(y)dy \tag{2}$$

ha per soluzione:

$$\psi(x) = \varphi'(x).$$

Nei riguardi di questo Teorema intendo ora esporre una nuova dimostrazione semplice ed immediata insieme ad alcune considerazioni alle quali sono pervenuto leggendo due interessanti Note

[1] Giuseppe Usai, *Sulle soluzioni in termini finiti di equazioni integrali col nucleo* x — y. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », 1921.

della sig.ª EDITTA PINI la quale ha fatto oggetto di studio (¹) le equazioni integrali della forma:

$$f(x) = \varphi(x) - \int_0^x [a(x) - a(y)]\varphi(y)dy.$$

2. Secondo la teoria svolta dalla PINI, la soluzione della equazione (1) può mettersi nella forma:

(3) $$\varphi(x) = f(x) + z$$

ove z è la soluzione della equazione differenziale del secondo ordine:

(4) $$f(x) = \frac{z''}{\lambda} - z$$

verificante le:

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = 0.$$

Per la stessa teoria, l'equazione (2) è soddisfatta dalla:

(5) $$\psi(x) = f'(x) + t$$

essendo t la soluzione della:

(6) $$f'(x) = \frac{t''}{\lambda} - t$$

per cui:

$$t(0) = 0, \quad t'(0) = 0.$$

Ora derivando la (4) abbiamo:

$$f'(x) = \frac{z'''}{\lambda} - z'$$

e dal confronto colla (6) si deduce $z' = t$ risultato che mette d'accordo le condizioni:

$$t(0) = 0, \quad t'(0) = 0$$

rispettivamente colle:

$$z'(0) = 0, \quad z''(0) = 0$$

quest'ultima avendosi dalla (4) per le ipotesi fatte:

$$z(0) = 0, \quad f(0) = 0.$$

Stabilito ciò la (5) diventa:

$$\psi(x) = f'(x) + z'$$

(¹) EDITTA PINI, *Sopra una classe di equazioni integrali.* « Bollettino Unione Matematica Italiana », 15 aprile 1931, Bologna; *Ancora su certe equazioni integrali.* « Bollettino Unione Matematica Italiana ». Bologna, 15 giugno 1931.

e per la (3) risulta:

$$\psi(x) = \varphi'(x) \qquad \text{c. v. d.}$$

3. Questo Teorema è un caso particolare del seguente:

Se $\varphi(x)$ è soluzione della equazione integrale:

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda\int_0^x k(x, y)\varphi(y)dy$$

e se $f(0) = 0$, l'equazione:

$$f'(x) = \psi(x) - \lambda\int_0^x k(x, y)\psi(y)dy$$

ha per soluzione:

$$\psi(x) = \varphi'(x)$$

purchè il nucleo k soddisfi l'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} = 0$$

ossia quando risulti $k(x, y) = \Phi(x - y)$ essendo Φ funzione arbitraria.

La dimostrazione trovasi in una mia Nota precedente (1).

4. In tale Nota ho dato anche della equazione integrale:

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda\int_0^x (x - y)\varphi(y)dy$$

la soluzione nella forma:

(7) $$\varphi(x) = f(x) + \sqrt{\lambda}\int_0^x f(y) \operatorname{senh} \sqrt{\lambda}(x - y)dy$$

e questa si presenta cómoda e rapida in molte applicazioni. Così nel caso della equazione:

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x (x - y)\varphi(y)dy$$

essendo ora $\lambda = -1$ si avrà:

$$\varphi(x) = f(x) + i\int_0^x f(y) \operatorname{senh} i(x - y)dy$$

e poichè come è noto $\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen} z$ potremo scrivere:

$$\varphi(x) = f(x) - \int_0^x f(y) \operatorname{sen}(x - y)dy = f(x) + \int_0^x f(y) \operatorname{sen}(y - x)dy$$

(1) GIUSEPPE USAI, *Processi riduttivi su equazioni integrali.* « Rendiconti Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », Milano 1921.

Soluzione che coincide con quella trovata mediante il suo metodo dalla sig.^{a} PINI.

5. Per ultimo si può vedere come l'uso della (7) sia vantaggioso per la risoluzione in termini finiti di certe equazioni integrali.

Consideriamo ad esempio quelle della forma:

$$1 - x^\alpha = \varphi(x) - \alpha^\alpha \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy \qquad (\alpha \text{ intero e positivo}) \tag{8}$$

e risolviamola prima di tutto col metodo delle approssimazioni successive. Ponendo all'uopo:

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \varphi_h(x)$$

troviamo:

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = -x^\alpha, \quad \varphi_2(x) = \frac{\alpha^\alpha x^2}{2!}, \ldots$$

ed in generale:

$$\varphi_{2n}(x) = \frac{\alpha^{n\alpha} x^{2n}}{(2n!)}, \qquad n, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\varphi_{2n+1}(x) = -\frac{\alpha^{n\alpha} x^{\alpha+2n}\alpha!}{(\alpha+2n)!}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Si potrà quindi scrivere:

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\alpha^{h\alpha} x^{2h}}{(2h)!} - \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\alpha^{h\alpha} x^{\alpha+2h}\alpha!}{(\alpha+2h)!}$$

ossia:

$$\varphi(x) = \cosh(\sqrt{\alpha^\alpha}x) - \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\alpha^{h\alpha} x^{\alpha+2h}\alpha!}{(\alpha+2h)!}. \tag{9}$$

La serie in sommatorio è sempre convergente, giacchè facendo il rapporto tra i coefficienti di $x^{\alpha+2n}$ e di $x^{\alpha+2n+2}$ troviamo:

$$\frac{(\alpha+2n+1)(\alpha+2n+2)}{\alpha^\alpha}$$

espressione che per $n \to \infty$ ha per limite l'infinito e questo limite per un noto Teorema di HADAMARD rappresenta il raggio di convergenza. Potremo quindi considerare la (9) quale soluzione effettiva della (8): tale soluzione è però in forma di serie.

Usando invece la formula (7) troviamo:

$$\varphi(x) = 1 - x^\alpha + \sqrt{\alpha^\alpha}\int_0^x (1-y^\alpha) \operatorname{senh} \sqrt{\alpha^\alpha}(x-y)dy$$

e successivamente:

$$\varphi(x)=1-x^{\alpha}+\sqrt{\alpha^{\alpha}}\left[\frac{-\cosh\sqrt{\alpha^{\alpha}}(x-y)}{\sqrt{\alpha^{\alpha}}}\right]_0^x-\sqrt{\alpha^{\alpha}}\int_0^x y^{\alpha}\,\mathrm{senh}\sqrt{\alpha^{\alpha}}(x-y)dy$$

e quindi:

$$\varphi(x)=\cosh(\sqrt{\alpha^{\alpha}}x)-x^{\alpha}-\sqrt{\alpha^{\alpha}}\int_0^x y^{\alpha}\,\mathrm{senh}\sqrt{\alpha^{\alpha}}(x-y)dy.$$

Eseguendo α integrazioni successive per parti troviamo:

Per α pari:

$$\varphi(x)=\cosh(\sqrt{\alpha^{\alpha}}x)-\tag{10}$$
$$-\frac{\alpha!}{\alpha^{\frac{\alpha^2}{2}}}\left[\cosh(\sqrt{\alpha^{\alpha}}x)-1-\frac{\alpha^{\alpha}x^2}{2}-\frac{\alpha^{2\alpha}x^4}{4!}-\ldots-\frac{\alpha^{\frac{\alpha(\alpha-2)}{2}}x^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!}\right].$$

Per α dispari:

$$\varphi(x)=\cosh(\sqrt{\alpha^{\alpha}}x)-\tag{11}$$
$$-\frac{\alpha!}{\alpha^{\frac{\alpha^2}{2}}}\left[\mathrm{senh}(\sqrt{\alpha^{\alpha}}x)-\alpha^{\frac{\alpha}{2}}x-\frac{\alpha^{\frac{3\alpha}{2}}x^3}{3!}-\ldots-\frac{\alpha^{\frac{\alpha(\alpha-2)}{2}}x^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!}\right].$$

Abbiamo in tal modo la soluzione della (8) in termini finiti.

Per l'unicità poi delle soluzioni nelle equazioni integrali ne viene che le somme (10) e (11) devono rappresentare il valore della serie (9).

Si può avere di questo fatto una bella conferma algebrica.

Osserviamo perciò:

$$\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\alpha!\,\alpha^{h\alpha}x^{\alpha+2h}}{(\alpha+2h)!}=\frac{\alpha!}{\alpha^{\frac{\alpha^2}{2}}}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\alpha^{\alpha\left(h+\frac{\alpha}{2}\right)}x^{\alpha+2h}}{(\alpha+2h)!}$$

e da qui se α è pari:

$$\frac{\alpha!}{\alpha^{\frac{\alpha^2}{2}}}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\alpha^{\alpha\left(h+\frac{\alpha}{2}\right)}x^{\alpha+2h}}{(\alpha+2h)!}=\frac{\alpha!}{\alpha^{\frac{\alpha^2}{2}}}\sum_{h=\frac{\alpha}{2}}^{\infty}\frac{\alpha^{\alpha h}x^{2h}}{(2h)!}=$$
$$=\frac{\alpha!}{\alpha^{\frac{\alpha^2}{2}}}\left[\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\alpha^{\alpha h}x^{2h}}{(2h)!}-\sum_{h=0}^{\frac{\alpha-2}{2}}\frac{\alpha^{\alpha h}x^{2h}}{(2h)!}\right]=$$
$$=\frac{\alpha!}{\alpha^{\frac{\alpha^2}{2}}}\left[\cosh(\sqrt{\alpha^{\alpha}}x)-1-\frac{\alpha^{\alpha}x^2}{2}-\ldots-\frac{\alpha^{\frac{\alpha(\alpha-2)}{2}}x^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!}\right].$$

Se α è dispari:

$$\frac{\alpha!}{\alpha^{\frac{\alpha^2}{2}}}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\alpha^{\alpha\left(h+\frac{\alpha}{2}\right)}x^{\alpha+2h}}{(\alpha+2h)!}=\frac{\alpha!}{\alpha^{\frac{\alpha^2}{2}}}\sum_{h=\frac{\alpha-1}{2}}^{\infty}\frac{\alpha^{\frac{\alpha(2h+1)}{2}}x^{2h+1}}{(2h+1)!}=$$

$$=\frac{\alpha!}{\alpha^{\frac{\alpha^2}{2}}}\left[\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\alpha^{\frac{\alpha(2h+1)}{2}}x^{2h+1}}{(2h+1)!}-\sum_{h=0}^{\frac{\alpha-3}{2}}\frac{\alpha^{\frac{\alpha(2h+1)}{2}}x^{2h+1}}{(2h+1)!}\right]=$$

$$=\frac{\alpha!}{\alpha^{\frac{\alpha^2}{2}}}\left[\operatorname{senh}\left(\sqrt{\alpha^{\alpha}}x\right)-\alpha^{\frac{\alpha}{2}}x-\ldots-\frac{\alpha^{\frac{\alpha(\alpha-2)}{2}}x^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!}\right].$$

Abbiamo così trovato espressioni che sono in perfetto accordo con le (10) e (11).