Bollettino Unione Matematica Italiana

P. Tortorici

Sulla validità di alcune formule dedotte da quella di Stokes relativa alla forma della Terra

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.2, p. 69–72.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_2_69_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1933.

Sulla validità di alcune formule dedotte da quella di Stokes relativa alla forma della Terra.

Nota di P. TORTORICI (a Palermo).

Sunto. - *Si esamina la legittimità del procedimento di derivazione sotto il segno integrale, applicato ad una ben nota formula di* STOKES *e si fa qualche rilievo sulla validità di alcune formule dedotte con tale procedimento e sulle conclusioni che se ne vorrebbero trarre.*

Una formula celebre di STOKES esprime gli scostamenti lineari $N(\theta, v)$, fra uno sferoide ed il *Geoide*, mediante le anomalie di gravità $\Delta(\theta', v')$ supposte note sullo sferoide: questa formula è, come è risaputo, la seguente:

$$N(\theta, v) = A\int_\sigma \Delta(\theta', v')F(\gamma)d\sigma, \tag{1}$$

essendo:

$$A = \frac{a^3}{4\pi f M},$$

$$F(\gamma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}} - 6\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} - 5\cos\gamma - 3\cos\gamma\log\left(\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\gamma}{2}\right)$$

e denotando a il raggio di una sfera, f la costante universale, M la massa della Terra, σ la sfera di raggio 1, (θ, v) il punto di σ di colatitudine θ e longitudine v, (θ', v') il punto variabile su σ e γ la distanza sferica fra i punti (θ', v') e (θ, v).

Lo scostamento $N(\theta, v)$ è relativo al punto P dello sferoide, sullo stesso raggio vettore pel punto (θ, v) [1].

Dalla formula (1), che è stata oggetto di molto studio e che è stata stabilita con tutto il rigore desiderabile, sono state tratte, come è noto, varie importanti conseguenze circa la effettiva forma del *Geoide* e sono stati anche assegnati dei limiti superiori circa gli scostamenti *regionali* del Geoide dall'ellissoide.

Altre conclusioni interessanti potrebbero aversi se, in qualche modo, si riuscisse ad esprimere, mediante le anomalie di gravità, le derivate della funzione scostamento $N(\theta, v)$ rispetto ai suoi argomenti; in particolare si avrebbero allora interessanti formule rela-

[1] Cfr. ad es. PIZZETTI, *Principî della teoria meccanica della figura dei pianeti.* Cap. VII, Bologna, Zanichelli.

tive alla questione, già abbastanza dibattuta, intorno alla possibilità di determinare il *Geoide* con sole misure di gravità [1].

In alcuni recenti studi [2] sono state fatte varie considerazioni su talune formule, ottenute sottoponendo la (1) a ingegnose trasformazioni, le quali, in ultima analisi, si riducono a derivarne i due membri, derivando però il secondo membro sotto il segno integrale. La validità delle formule così dedotte non è però ben chiara, giacchè, come esporrò qui brevemente, il procedimento seguito non appare generalmente lecito, e, prima di introdurre nelle formule ipotesi semplificative e trarne alcune conseguenze, occorrerebbe mettere le formule stesse al sicuro da ogni obiezione.

Ponendo in (1) per $d\sigma$, la sua espressione:

$$d\sigma = \operatorname{sen} \theta' d\theta' dv'$$

si ha:

$$N(\theta, v) = A \int_\sigma \Delta(\theta', v') F(\gamma) \operatorname{sen} \theta' d\theta' dv',$$

essendo:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta' \cos (v - v').$$

Volendo applicare *formalmente* il procedimento di derivazione sotto il segno, si ha:

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} = A \int_\sigma \Delta(\theta', v') F'(\gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \operatorname{sen} \theta' d\theta' dv',$$

$$\frac{\partial N}{\partial v} = A \int_\sigma \Delta(\theta', v') F'(\gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial v} \operatorname{sen} \theta' d\theta' dv'.$$

Ora, introducendo per il punto (θ', v') variabile su σ, oltre alla distanza sferica γ da (θ, v), la longitudine ω, rispetto a (θ, v) come polo e contata dal meridiano passante per il polo primitivo, si trova:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \cos \omega, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial v} = \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \theta.$$

Inoltre, nelle ultime formule scritte, converrà esprimere, ciò che è facile, le variabili θ', v' in funzione di θ, v; γ, ω e, denotando con $\Delta^*(\theta, v; \gamma, \omega)$ la espressione di $\Delta(\theta', v')$ dopo il cambia-

(1) Cfr. C. MINEO, *Su una formula analoga a quella di Stokes per la determinazione del Geoide con le deviazioni della verticale.* « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. VI, serie 6ª, 2º sem. 1927.

(2) Cfr. F. A. VENING MEISNEZ, *A formula expressing the deflection of the plumb-line in the gravity anomalies and some formulae for the gravity-field, and the gravity-potential outside the Geoïd.* « Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceeding », vol. XXXI, n. 3, 1928.

mento delle variabili:

$$\Delta(\theta', v') = \Delta^*(\theta, v; \gamma, \omega),$$

si ha:

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} = A\int_0^{2\pi} \cos \omega d\omega \int_0^{\pi} \Delta^*(\theta, v; \gamma, \omega) F'(\gamma) \operatorname{sen} \gamma d\gamma,$$

$$\frac{\partial N}{\partial v} = A \operatorname{sen} \theta \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \omega d\omega \int_0^{\pi} \Delta^*(\theta, v; \gamma, \omega) F'(\gamma) \operatorname{sen} \gamma d\gamma.$$

Poichè è:

$$F'(\gamma) \operatorname{sen} \gamma = -\cos^2 \frac{\gamma}{2} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}} + 12 \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} - 32 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{1 + \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}} - 12 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \log \left(\operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \right) \right],$$

appare chiaro che la funzione $F'(\gamma) \operatorname{sen} \gamma$ ha, nel punto (θ, v), cioè nel polo in cui vogliono calcolarsi le derivate, un infinito del primo ordine mentre è continua in ogni punto interno a $(0, \pi)$ e perciò, sulla esistenza dell'integrale

$$\int_0^{\pi} \Delta^*(\theta, v; \gamma, \omega) F'(\gamma) \operatorname{sen} \gamma d\gamma,$$

nulla può affermarsi in generale, anzi, ove, si ammetta ad es. che, nelle vicinanze del polo, la anomalia di gravità Δ^* sia ovunque maggiore di un numero positivo ε, l'integrale ora scritto non ha significato.

Questa conclusione negativa, come è naturale, non esclude in alcun modo l'esistenza delle derivate della funzione $N(\theta, v)$.

Per procurarsi le espressioni di queste derivate può esser preferibile, invece, cambiare prima le variabili nella (1), assumendo ancora, come nuove variabili, γ ed ω.

Si ha allora:

$$N(\theta, v) = A\int_{\sigma} \Delta^*(\theta, v; \gamma, \omega) F(\gamma) \operatorname{sen} \gamma d\gamma d\omega$$

e, ammettendo che la funzione Δ^* sia derivabile, applicando, *sempre formalmente,* il procedimento di derivazione sotto il segno, si ha:

$$\frac{\partial N}{\partial \theta} = A\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta^*(\theta, v; \gamma, \omega) F(\gamma) \operatorname{sen} \gamma d\gamma,$$

$$\frac{\partial N}{\partial v} = A\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial v} \Delta^*(\theta, v; \gamma, \omega) F(\gamma) \operatorname{sen} \gamma d\gamma.$$

La funzione $F(\gamma)\operatorname{sen}\gamma$ è, su σ, continua e potrà accadere che i due integrali estesi a $(0, \pi)$, che figurano nei secondi membri di queste formule, abbiano significato, così che, per questa via, potrebbe a volte riuscire di ottenere le derivate desiderate.

Riporterò altrove un esempio teorico semplicissimo nel quale è possibile avere le effettive espressioni dello scostamento $N(\theta, v)$ e della anomalia di gravità $\Delta(\theta', v')$ e, mentre adoperando il primo dei procedimenti esposti si perviene ad espressioni prive di significato, si verifica facilmente che il secondo procedimento è legittimo e conduce allo scopo desiderato.

Deve concludersi perciò che le formule dedotte col primo metodo non sono da accettare senza che se ne dia piena giustificazione e tanto meno, quindi, lo sono le altre che da queste vorrebbero trarsi iterando il procedimento di derivazione sotto il segno: è immediatamente visibile che la funzione integranda, nell'intervallo $(0, \pi)$, acquista nell'estremo sinistro un infinito di ordine intero, maggiore di uno, e via via crescente.