Bollettino Unione Matematica Italiana

Ugo Cassina

Su la Logica matematica di G. Peano

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.2, p. 57–65.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_2_57_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1933.

PICCOLE NOTE

Su la Logica matematica di G. Peano.

Nota di UGO CASSINA (a Milano).

Sunto. - *Si riferisce su alcuni punti delle ricerche di* G. PEANO *sulla Logica matematica ed in particolare sul Formulario di matematica del 1897. Si conclude con considerazioni sul significato e l'importanza delle suddette ricerche.*

Come complemento all'ottimo studio del prof. BEPPO LEVI sull'Opera matematica di GIUSEPPE PEANO, espongo qualche notizia sulla Logica matematica peaniana, la quale, nelle ultime edizioni del *Formulario Mathematico* (e specialmente nell'ultima: F.V. 1906-1908) è ridotta ad una semplice esposizione simbolica dei principii logici che si incontrano nelle dimostrazioni matematiche, ma che invece nelle prime raccolte di formole del PEANO (1889-1901) — e specialmente in F. 1891 (*Riv. di Mat.*, 1891, p. 24, p. 82), F. 1897 (*Form. math.*, t. II, § 1) ed in F. 1901 (*Form. math.*, t. III, 1901 — è studiata in sè, ed ordinata come una pura scienza matematica.

Cosicchè considererei F. 1897 come il miglior trattato di Logica matematica pubblicato finora.

F. 1897 porta il titolo completo di « Formulaire de Mathématiques » publié par la « Revue de Mathématique », t. II § 1, *Logique Mathématique* par G. PEANO (11-VIII-1897 [1], ed. Bocca e Clausen, Torino). L'opera consiste di 14 proposizioni descriventi le notazioni usate, di 254 proposizioni simboliche (pp. 1-18), di una bibliografia e di note esplicative della parte simbolica (pp. 19-64).

Delle 254 proposizioni simboliche, 43 sono *definizioni* (Df), 11 sono *postulati* (Pp) e le rimanenti 199 sono teoremi: cioè sono dimo-

[1] È la data del I Congresso Internazionale dei Matematici (tenuto a Zurigo), in occasione del quale venne pubblicato.

strate mediante le 11 Pp simboliche, il principio di *sostituzione* delle variabili apparenti (enunciato a p. 2 e p. 26) ed il principio di *invertibilità* dell'ordine delle proposizioni primitive (enunciato a p. 35). Fra i 199 teoremi, 12 sono segnalati come definizioni possibili in altri ordinamenti della Logica.

Sul significato da dare ai vocaboli *definizione* e *dimostrazione* è bene (²) leggere quanto scrive lo stesso PEANO fin dai primi suoi lavori di Logica matematica (1889-1891).

Per es., in F'. 1889 (*Princ. di Geom.*), p. 25, si legge:

« Per *definizione* si intende una proposizione della forma $x = a$, ovvero $\alpha \supset . x = a$, ove a è un aggregato di segni avente senso già noto, x è il segno, o gruppo di segni, che si vuol definire, ed α è l'ipotesi sotto la quale si dà la definizione. Dire che, dati certi enti, si può definire un nuovo ente x, significa che cogli enti dati si può formare un'espressione a in guisa che si abbia l'eguaglianza $x = a$.

« È chiaro che non tutti gli enti si possono definire; ma è importante in ogni scienza di ridurre al minimo numero gli enti non definiti. Di questi si enunceranno solo le proprietà. La riduzione degli enti non definiti al minimo numero presenta alcuna volta dell'arbitrario; così se mediante a e b si può definire c, e mediante a e c si puo definire b, resta in nostro arbitrio la scelta come sistema irreduttibile fra a, b e a, c... »;

ed a p. 28:

« È noto che la Logica scolastica non è di sensibile utilità nelle dimostrazioni matematiche; poichè in queste mai si menzionano le classificazioni e regole del sillogismo, e d'altra parte vi si fa uso di ragionamenti, del tutto convincenti, ma non riduttibili alle forme considerate in Logica. Per questa ragione alcuni matematici, fra cui CARTESIO, proclamarono l'evidenza l'unico criterio per riconoscere l'esattezza d'un ragionamento.

« Ma questo principio lascia alla sua volta a desiderare. Una dimostrazione può essere più o meno evidente; essere evidente per una persona, dubbia per un'altra; e ad ognuno sarà successo di trovare insufficienti delle dimostrazioni già ritenute esatte. Esso poi lascia tanto più a desiderare nelle nostre ricerche, le quali si riferiscono a proposizioni, a cui si è tanto abituati, che possono parere a molti pressochè evidenti.

(²) Infatti per quanto si tratti di nozioni assai semplici e generalmente note, esse non sono ancora di dominio esplicito comune. Basti il ricordare che il genio di H. POINCARÉ non è giunto ad esse (cfr. « Riv. di Mat. », t. VIII, p. 155).

« Però questa questione è suscettibile di soluzione del tutto soddisfacente. Invero, ridotte, come qui si è fatto, le proposizioni in formole analoghe alle equazioni algebriche, allora, esaminando le comuni dimostrazioni, si scorge che esse consistono in trasformazioni di proposizioni e gruppi di proposizioni, aventi massima analogia colle trasformazioni delle equazioni algebriche simultanee. Queste trasformazioni, o identità logiche di cui facciamo continuamente uso nei nostri ragionamenti, si possono enunciare e studiare. La raccolta delle identità logiche di cui facciamo uso fu già fatta nel mio opuscolo menzionato ([3]); molte di esse furono raccolte dal BOOLE. Il loro numero è grande; sarebbe uno studio interessante, e che finora manca, il distinguere le fondamentali, che si debbono ammettere senz'altro, dalle rimanenti, contenute nelle fondamentali. Questa ricerca porterebbe ad uno studio sulla Logica, analogo a quello qui fatto per la Geometria, e nel precedente opuscolo per l'Aritmetica ... ».

In F. 1894 (*Notations de Logique Math.*) si legge inoltre:

« ... s'il y a des idées qu'on ne peut pas définir, on trouvera aussi des propositions qu'on ne peut pas démontrer, et dont découlent par le raisonnement toutes les autres. Nous les appelerons propositions primitives, et par abréviations Pp; ... Le choix des propositions primitives a aussi de l'arbitraire; car si des propositions *a*, *b*, *c* on déduit *d*, et de *a*, *b*, *d* on déduit *c*, on peut prendre comme propositions primitives les *a*, *b*, *c* ou les *a*, *b*, *d* ».

Il programma enunciato nelle ultime righe del passo di F'. 1889 riportato, venne poi svolto dal PEANO completamente ed in vari modi (1891, 1893, 1897, 1901). Qui mi riferisco appunto all'ordinamento del 1897.

Le idee primitive adottate in F. 1897 sono espresse mediante successioni di simboli — i più nella forma adottata in F'. 1889 (*Arith. princ.*), — che servono ad individuare l'idea primitiva rappresentata mediante la successione stessa ([4]). Per non correre il rischio di travisare attraverso la mia interpretazione il pensiero del PEANO, riporterò senz'altro i passi di F. 1897 in cui sono spiegate le notazioni:

([3]) F. 1889, *Arithmetices principia nova methodo exposita.*

([4]) PEANO — sia in Logica che in Matematica — non fa mai del puro *simbolismo*: cioè esige sempre che i simboli primitivi introdotti rappresentino idee *intuitive* da spiegarsi col linguaggio ordinario. (Cfr.: F'. 1889, p. 7; F. 1894, p. 50; F. 1897, p. 27; « Riv. di Mat., » t. VIII, p. 142; « Scientia », 1915, p. 170).

(p. 3): « 1. K signifie « classe » (5).

2. Soit a une classe; $x \varepsilon a$ indique la proposition « x est un a ».

3. On divise une formule en parties par des parenthèses ( ) [ ] ou par des points.

4. Les lettres $a, b, \ldots x, y, z$ désignent des objets quelconques.

5. Soient p et q des propositions contenant des lettres variables $x \ldots z$. La formule

$$p \supset_{x, \ldots z} q$$

signifie « de p on déduit, quel que soient $x, \ldots z$, la q ».

6. L'affirmation simultanée des p et q est indiquée par $p \frown q$, ou par pq ».

(p. 6): « 70. (x, y) indique le couple (6) formé des objets x et y ».

(p. 7): « 100. Soit p une proposition; $- p$ désigne (7) sa négation ».

Nelle note esplicative dà qualche schiarimento complementare:

(p. 23): « Par les lettres (italiques) $a, b, \ldots x, y, z$ nous désignerons des objets quelconques, variables avec la formule.

... Dans le langage commun il n'y a pas de lettres variables; elles sont remplacées par » un, un autre, le même ... ».

« Dans ces explications nous dirons que, dans une formule une lettre est *réelle* ou *apparente*, selon que la valeur de la formule dépend, ou ne dépend pas du nom de cette lettre. Ainsi dans $\int_0^1 x^m dx$, la lettre x est *apparente* et la lettre m est *réelle*. Toutes les lettres qui figurent dans un théorème sont apparentes; car sa verité est indépendante du nom des lettres ».

Dai brani riportati risulta che le idee primitive di *parentesi* (o *punti*) e quello di *definizione* sono di pertinenza della Linguistica; e che i concetti logici assunti come primitivi in F. 1897 si possono esprimere col linguaggio ordinario coi vocabili seguenti:

1. *ente* (8), 2. *classe*, 3. *coppia* (ordinata), 4. *proposizione*, 5. *congiunzione* (od *affermazione simultanea*, o *prodotto*) di proposizioni, 6. *condizione* (o proposizione con una o più variabili), 7. *deduzione* fra condizioni, 8. *negazione* di una proposizione.

Si deve a PEANO l'osservazione esplicita (9) che si può stabilire

(5) Altra forma del simbolo: Cls.

(6) La coppia (x, y) è stata poi indicata con $x; y$.

(7) Altra forma del simbolo: $\sim$ (più comoda nei manoscritti).

(8) La nozione di *ente*, che figura implicitamente come primitiva nella P. 80 di F. 1897, può essere definita mediante i simboli precedenti; quindi non è necessario introdurre un nuovo simbolo primitivo per essa. Lo stesso dicasi per la nozione di *individuo*. Cfr. F. 1894, p. 38.

(9) F. 1889, p. XII, P. 58 e P. 59.

una trasformazione reciproca fra le classi e le condizioni, e l'introduzione dei simboli operativi corrispondenti alla trasformazione diretta ed all'inversa. Perciò, poichè « $x\varepsilon$ » (x è) è il simbolo (operatore a sinistra) che permette di trasformare ogni classe in una condizione, il Peano indica con « $x\ni$ » (x che) il simbolo (operatore a sinistra) della trasformazione inversa [10]. Per modo che, se p è una condizione in x ed eventualmente in altre variabili, allora « $x\ni p$ » indica la classe formata dalle soluzioni di p, cioè dagli x che soddisfano alla condizione p (in cui si riguarda come variabile solo x).

Il Peano definisce poi — sempre in F. 1897 — l'inclusione, l'intersezione e l'eguaglianza fra classi nel seguente modo [11]:

12. $a, b\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\supset_{a,b}\therefore a\supset b\,.=:x\,\varepsilon\,a\,.\supset_x.\,x\,\varepsilon\,b$ Df.
14. ——————— $.\ a\frown b\ =\ x\ni(x\,\varepsilon\,a\,.\,x\,\varepsilon\,b)$ Df.
16. ——————— $\therefore a=b\,.=:a\supset b\,.\,b\supset a$ Df.

È così in grado di enunciare le prime 7 proposizioni simboliche primitive. Io invece riporterò qui senz'altro il quadro completo delle proposizioni che in F. 1897, portano la qualifica esplicita di essere assunte come primitive (Pp.). Esse sono le 11 seguenti:

21. $a\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\supset_a.\,a\supset a$ Pp.
22. $a, b\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\supset_{a,b}.\,ab\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}$ Pp.
23. ——————— $.\,ab\supset a$ Pp. } Simpl
24. ——————— $.\,ab\supset b$ Pp. }
25. $a, b\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\supset b\,.\,x\,\varepsilon\,a\,.\supset_{a,b,x}.\,x\,\varepsilon\,b$ Pp. } Syll
26. $a, b, c\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,a\supset b\,.\,b\supset c\,.\supset_{a,b,c}.\,a\supset c$ Pp. }
27. ——————— $.\,a\supset b\,.\,a\supset c\,.\supset_{a,b,c}.\,a\supset bc$ Pp. Cmp
72. $a, b, c\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}:x\,\varepsilon\,a\,.\,x;y\,\varepsilon\,b\,.\supset_{x,y}.\,x;y\,\varepsilon\,c\,.\therefore\supset_{a,b,c}\therefore$
$x\,\varepsilon\,a\,.\supset_x:x;y\,\varepsilon\,b\,.\supset_y.\,x;y\,\varepsilon\,c$ Pp. Export
105. $a\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\supset.(-a)\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}$ Pp.
106. ——————— $.\,-(-a)=a$ Pp.
107. $a, b, c\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}\,.\,ab\supset c\,.\,x\,\varepsilon\,a\,.\,x-\varepsilon\,c:\supset_{a,b,c,x}.\,x-\varepsilon\,b$ Pp.

(10) Questo simbolo ha avuto successivamente le forme:

$$x:,\quad [x\varepsilon],\quad \overline{x\varepsilon},\quad x\ni.$$

(11) Nella trascrizione ho aggiunto gli indici sottintesi, ed ho fatto uso del segno Cls per le classi e del segno ; per le coppie. Da notare che « $a, b\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}$ » è l'abbreviazione dell'altra « $a\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}.\ b\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}$ » e lo stesso dicasi di « $a, b, c\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}$ ».

La 107 può essere sostituita — e così è fatto in F. 1898 — dalla

108. $a, b, c \varepsilon \mathrm{Cls} \,.\, ab \supset c \,.\supset_{a,b,c}.\, a - c \supset - b$ Transp (*).

Gli indici a, (a, b), (a, b, c), etc. ai segni $\supset$ nelle proposizioni simboliche precedenti sono delle variabili *apparenti*: cioè le proposizioni simboliche scritte rimangon vere sostituendo a dette variabili dei simboli qualunque, variabili o non.

In quest' affermazione consiste il « principio di *sostituzione* delle variabili apparenti », che è da incorporare come dodicesimo postulato interpretativo delle 11 Pp simboliche riportate. Il principio di sostituzione è spiegato ([12]), col linguaggio ordinario a p. 2 e p. 26 di F. 1897, ed è indicato nelle applicazioni mediante il simbolo apposito di sostituzione.

Un tredicesimo postulato interpretativo delle 11 Pp, di cui si fa uso nelle dimostrazioni, è il « principio di *invertibilità* dell' ordine delle proposizioni primitive », enunciato a p. 35 di F. 1897.

Il principio di sostituzione permette di trasformare una deduzione fra condizioni in una deduzione fra proposizioni (categoriche). Basta infatti sostituire, alle variabili apparenti d' una proposizione che ha la forma d' una deduzione fra condizioni, degli enti determinati. Il calcolo delle proposizioni categoriche diventa così superfluo ([13]).

(*) Sostituendo ai segni $\supset \frown =$ fra classi le loro definizioni, date dalle 12, 14 e 16, le proposizioni precedenti si possono enunciare a parole così:

« Se p è una condizione, *allora* da p si deduce p ».

« Se p e q sono condizioni, *allora* la loro affermazione simultanea è una condizione, da cui si può dedurre p, e da cui si può dedurre q »..

« Se p e q sono condizioni e da p si deduce q ed x è una soluzione di p, *allora* x è una anche una soluzione di q ».

« Se p, q, r sono condizioni e da p si deduce q e da q si deduce r, *allora* da p si deduce r ».

« Se p, q, r sono condizioni e da p si deduce q e da p si deduce r, *allora* da p si deduce l'affermazione simultanea di q e di r ».

« Se p è una condizione in x, e q ed r delle condizioni in x ed y, e dalla affermazione simultanea di p e q si deduce, qualunque siano x ed y, la r, *allora* dalla p si ha, qualunque sia x, che q implica rispetto ad y la r ».

« Se p è una condizione, *allora* la sua negazione è pure una condizione ».

« Se p è una condizione, *allora* la negazione della negazione di p è eguale a p »: cioè essa implica p, e viceversa p implica essa.

« Se p, q, r sono condizioni e l'affermazione simultanea di p e di q implica r, *allora* l'affermazione simultanea di p per la negazione di r implica la negazione di q ».

([12]) Un' ampia formulazione esplicita di questo trovasi in F. 1894, p. 17-18.

([13]) Vedasi su ciò F. 1894, p. 18.

Sarebbe interessante il vedere come PEANO dimostra, mediante il sistema di proposizioni primitive di F. 1897, le altre regole fondamentali del ragionamento; ma non è qui il posto per farlo. Quindi porrò termine a quest'articolo riassumendo le mie vedute su l'opera logica matematica di PEANO nel seguente modo:

Primo: Le 11 proposizioni primitive di PEANO, e le proposizioni dimostrate mediante esse, hanno la forma di deduzioni, e sono irriducibili ad affermazioni di proposizioni *semplici* (cioè che non siano l'affermazione simultanea di altre proposizioni). Ne risulta che per lui, la *Logica* appariva (d'accordo col significato etimologico) essenzialmente come la scienza che studia le forme di ragionamento, cioè come la *Teoria delle deduzioni*: ossia delle proposizioni del tipo « Se a è vera, allora anche b è vera », o, sotto altra forma, « Non è vera l'affermazione simultanea di p e q ».

Se quindi si vuole applicare la teoria delle deduzioni per sviluppare con metodo deduttivo una qualche scienza, *è necessario* introdurre dei postulati *esistenziali*: cioè affermare che gli oggetti che si propone di studiare la nostra scienza non sono assurdi, cioè formano una classe *non vuota* (ed *esistente*).

Così, pur rimanendo nel campo logico in senso lato, per fare una *Teoria delle classi*, è necessario affermare in qualche modo che « vi è qualche classe ».

Come tale, può servire la proposizione

« $\Lambda \varepsilon$ Cls », che possiamo leggere « Vi è una classe ed una sola contenuta in ogni classe « (la classe *vuota* o *nulla*); la quale figura in F. 1897 col n. 436.

Un'altra proposizione della teoria delle classi è la seguente « $\iota x \varepsilon$ Cls », cioè « Ad ogni ente (x) corrisponde una classe (ιx) composta da quel solo ente ».

Queste proposizioni, necessarie nella teoria delle classi ed usate anche da PEANO (il quale però non scrive mai esplicitamente la seconda), non portano la qualifica Pp, per quanto siano indipendenti dalle precedenti. La ragione di ciò io ritengo che sia appunto da ricercare in questa *indipendenza*, per cui la loro affermazione non è compito della Logica in senso stretto, ma bensì della Teoria delle classi ([14]).

([14]) Che questa mia veduta sia attendibile, risulta esplicitamente da F. 1891, F. 1897 e F. 1901, dai sistemi di Pp dei quali, non si posson dedurre in alcun modo affermazioni isolate del tipo « $a \varepsilon$ Cls »; ed è suffragata da quella che fu un'abitudine costante di PEANO (esplicitamente dichiarata, v. *Fondamenti Anal.*, 1910) di eliminare, in ogni teoria sistematica, ogni proposizione inutile (nella teoria stessa) e di tacere su ogni questione non risoluta.

Cosicchè, l'esaminare ciò che non contiene l'opera di PEANO, è pure talvolta assai interessante:

Come es., rilevo che nelle raccolte di formole pubblicate da PEANO non vi è traccia della proposizione.

« $\iota x - = x$, », cioè « x è diverso dalla classe composta dal solo x », perchè — per quanto sia vera — essa è *inutile*, risultando la disegua-

Secondo: Nell'opera logica matematica di PEANO si possono distinguere i seguenti periodi:

a) studio dei lavori di BOOLE e SCHRÖDER sul calcolo delle classi e di PEIRCE e MC COLL sul calcolo delle proposizioni, ed osservazione esplicita, mediante l'introduzione del simbolo operativo apposito, dell'identità del calcolo delle classi a quello delle condizioni (F. 1888, *Calcolo geometrico*);

b) creazione della sua ideografia ([15]) e risoluzione completa (mediante una decina di simboli rispetto al migliaio di vocaboli del linguaggio ordinario) del problema posto da LEIBNIZ di scrivere completamente in simboli ogni proposizione di Logica (F. 1889);

c) sistemazione della Logica come scienza matematica: Dapprima, nel 1891, espone il calcolo completo delle proposizioni condizionali o no, fondato sull'uso di 12 Pp. A questa prima esposizione (che, come egli stesso avverte (p. 26) è ancora imperfetta, ma che ciò non ostante è la prima ([16]) esposizione matematica completa del calcolo delle proposizioni

glianza fra x ed ιx implicitamente dalla differente espressione simbolica, e d'altra parte — in quanto è indipendente dai suoi sistemi di Pp — è esclusa la possibilità di dedurne la sua negazione. Nè vi si trovano le formole

$$x \varepsilon a . \supset . a \varepsilon \mathrm{Cls} \qquad x \ni (x \varepsilon a) = a . \supset . a \varepsilon \mathrm{Cls}$$

che son *dubbie*, perchè restringono a priori il significato del simbolo Cls; ed ancor più perchè portano alla « Cls ε Cls », formola a cui sono collegate antinomie celebri.

([15]) Fra i simboli di PEANO, quelli più importanti — introdotti da lui per la prima volta sia per il significato che per la forma — sono i 6 seguenti:

$$\ni \text{(1888)} \qquad \supset_x \ \varepsilon \text{(1889)} \qquad \iota \ ℩ \text{(1890)} \qquad \exists \text{(1897)}.$$

L'introduzione dei segni ε e ι (e dei segni inversi ϶ ℩) ed il conseguente spezzamento del segno $=$ nella successione $\varepsilon \iota$, è uno dei risultati più cospicui dell'opera simbolica di PEANO; risultato che, per quanto discusso all'inizio, è ora tenuto ben presente da ogni studioso della Teoria delle classi.

Il segno ι ed il segno d'*inversione* (1890) — che negli ultimi lavori ha la forma | — gli han poi permesso di risolvere il problema generale dell'inversione d'un simbolo operativo.

Per la storia del segno $\supset$ cfr.: G. VACCA, « Riv. di Mat. », t. VI, p. 184; « F. 1894 », p. 16-18; « Atti Torino », v. 32, 1897, p. 9.

([16]) Si confrontino le poche pagine di questa esposizione di PEANO con il grosso libro pubblicato da SCHRÖDER poco dopo nello stesso anno (*Vorles. ü. die Algebra der Logik*, II Bd.) e dedicato al calcolo delle proposizioni (*Aussagenkalkul*), dove vi è sì un tentativo di sistemazione matematica, ma ancora in embrione: tanto che l'autore confessa che nel suo ordinamento non è sempre sicuro di saper distinguere una definizione da un assioma o principio, da un teorema.

condizionali o no) porta dei perfezionamenti successivi, che possono esser così riassunti: 1° riconoscimento della necessità di introdurre fra le idee primitive quella di *coppia* (ordinata) e conseguente distinzione delle proposizioni ad una variabile da quella a due (o più variabili); 2° eliminazione dei concetti primitivi di *proposizione categorica* o *condizionale* (espressi entrambi attraverso il concetto di *classe*); 3° riduzione del numero di Pp, che in F. 1897 è 11, malgrado l'enunciazione esplicita dei postulati 22 e 105, i quali invece in F. 1891 (ed F. t. I, 1895) erano impliciti.

Perciò — a prescindere dal valore intrinseco della Logica matematica di G. PEANO su cui non sarebbe possibile trovare accordo fra me ed il lettore ostile per abito mentale congenito ad ogni simbolismo logico - mi pare che il ritenere, come io ritengo, che l'opera di G. PEANO nel campo della Logica matematica sia di gran lunga superiore a quella compiuta finora da ogni altro, non sia soltanto presunzione di discepolo.