Bollettino Unione Matematica Italiana

Alessandro Terracini

Sullo scarto dalla normalità delle congruenze rettilinee

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.1, p. 7–12.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_1_7_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1933.

Sullo scarto dalla normalità delle congruenze rettilinee.

Nota di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino).

Sunto. - *Si indica un modo per misurare di quanto una congruenza rettilinea, in un dato punto di un suo dato raggio, si scosti dall'essere normale. Lo scarto dalla normalità così definito resta strettamente collegato con la cosidetta densità della congruenza. Si osserva un caso in cui il classico teorema di* MALUS-DUPIN *sulla conservazione, attraverso rifrazioni, della normalità di una congruenza si estende alla nozione qui introdotta.*

Scopo di questa Nota è di indicare un modo per valutare di quanto una congruenza rettilinea si scosti dall'essere normale. Come misura di tale scostamento, o scarto, si potrebbe *a priori* assumere la differenza $d^2 - \delta^2$ dove $2d$ e 2δ designano rispettivamente le distanze fra i due punti limiti e fra i due fuochi di un raggio della congruenza, in quanto l'annullarsi identico di quella differenza per tutti i raggi della congruenza è appunto condizione necessaria e sufficiente per la normalità. Ma un tale modo di misurare lo scarto dalla normalità avrebbe anzitutto l'inconveniente di essere artificioso, in quanto non si lega immediatamente alla nozione geometrica della normalità, bensì a una conseguenza di questa; inoltre esso darebbe soltanto un'indicazione globale relativa all'intero raggio della congruenza, anzichè al comportamento di questa intorno ai singoli punti del raggio stesso.

Consideriamo una congruenza (in coordinate cartesiane ortogonali) che supponiamo addirittura analitica, e adottiamo per essa le notazioni del BIANCHI [1], cosicchè i suoi raggi si rappresentano mediante i punti (x, y, z) in cui essi escono da una superficie di partenza S, e i loro coseni direttori l, m, n; le sei quantità x, y, z, l, m, n risultando funzioni (analitiche) di due variabili u, v. Le due forme quadratiche fondamentali di KUMMER si scrivono [2]:

$$\Sigma dl^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$
$$\Sigma dl dx = e du^2 + (f + f') du dv + g dv^2,$$

dove

$$E = \Sigma l_u^2, \quad F = \Sigma l_u l_v, \quad G = \Sigma l_v^2;$$
$$e = \Sigma l_u x_u, \quad f = \Sigma l_u x_v, \quad f' = \Sigma l_v x_u, \quad g = \Sigma l_v x_v.$$

Sia g un raggio generico della congruenza, e P un suo punto generico. Particolarizziamo, per ora, la rappresentazione analitica adottando come origine O delle coordinate lo stesso punto P, come asse z lo stesso raggio g, e come superficie di partenza S il piano π normale in $O \equiv P$ al raggio g, cioè il piano xy, facendo [3] inoltre $u = x$, $v = y$: cosicchè in prossimità di g le equazioni di un raggio della congruenza saranno

$$x = a(u, v)z + u, \quad y = c(u, v)z + v, \tag{1}$$

dove $a : b : 1 = l : m : n$ (in particolare $a(0, 0) = b(0, 0) = 0$). Chiameremo poi a_1, a_2, c_1, c_2 i valori di a_u, a_v, c_u, c_v per $u = v = 0$.

Volendo definire una superficie γ che, vicino al punto P, si comporti per quanto è possibile come una superficie normale alla congruenza nello stesso punto P, assumiamo intanto γ rigorosamente normale nel punto P al raggio g, cioè tangente al piano $\pi \equiv xy$. Perciò fissiamo su ogni retta della congruenza prossima a g un punto per cui sia

$$z = \lambda_{11}u^2 + 2\lambda_{12}uv + \lambda_{22}v^2 + \ldots \tag{2}$$

lo sviluppo locale della z in serie di potenze di u, v, mentre x, y si hanno dalle (1) sostituendovi per z il valore (2); si ottengono così le equazioni parametriche della superficie γ. In un punto Q

(1) *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, 3ª ed., Bologna 1922; v. il Cap. X.

(2) Indichiamo con Σ la sommatoria rispetto alle tre coordinate; gli indici designano derivazione.

(3) Resta così escluso il caso in cui una falda focale della congruenza degenera in una linea contenuta nel piano che è normale al raggio g nel punto P considerato.

di questa prossimo a P valutiamo l'angolo ϑ compreso fra la retta ivi normale alla superficie stessa e il raggio della congruenza uscente da Q. Si ha facilmente per il termine principale $T(\text{sen}^2\vartheta)$ di $\text{sen}^2\vartheta$ l'espressione

$$(3)\quad T(\text{sen}^2\vartheta)=[(2\lambda_{11}+a_1)u+(2\lambda_{12}+a_2)v]^2+[(2\lambda_{12}+c_1)u+(2\lambda_{22}+c_2)v]^2.$$

Se la congruenza studiata fosse normale, si potrebbe determinare il secondo membro di (2) in modo che risultasse ovunque $\text{sen}\,\vartheta=0$. È perciò naturale di definire lo scarto dalla normalità nel punto P in modo che esso risulti tanto più piccolo *quanto più è possibile di rendere piccolo* $\text{sen}^2\vartheta$ *intorno a* P.

Per precisare questo punto di vista, consideriamo sul piano π un circoletto avente il centro in P e raggio infinitesimo r: cercheremo allora di rendere quanto più piccolo è possibile l'$\iint \text{sen}^2\vartheta\, du dv$ esteso a questo cerchio. In base a (3) il termine principale di questo integrale è

$$T(I)=\frac{\pi}{4}r^4[(2\lambda_{11}+a_1)^2+(2\lambda_{12}+c_1)^2+(2\lambda_{12}+a_2)^2+(2\lambda_{22}+c_2)^2].$$

Esso è tanto più piccolo, quanto minore è la quantità in parentesi quadra: volendo scegliere la superficie γ in modo da rendere minima questa espressione (nel qual caso la superficie γ si potrà dire *quasi normale* alla congruenza nel punto considerato) si deve assumere

$$(4)\qquad \lambda_{11}=-\frac{1}{2}a_1,\quad \lambda_{12}=-\frac{1}{4}(a_2+c_1),\quad \lambda_{22}=-\frac{1}{2}c_2$$

ed allora

$$(5)\qquad T(I)=\frac{\pi}{8}r^4(c_1-a_2)^2.$$

In definitiva, come misura μ dello *scarto dalla normalità* nel punto P si può assumere il coefficiente di r^4 nella (5) — a meno del coefficiente costante $\pi/8$ —, cioè si può assumere

$$(6)\qquad \mu=(c_1-a_2)^2.$$

Volendo per μ un'espressione avente carattere intrinseco, ricordiamo che qualunque sia la superficie di partenza

$$(7)\qquad d^2-\delta^2=\frac{(f-f')^2}{4(EG-F^2)}$$

mentre l'equazione che determina le ascisse dei fuochi è

$$(8)\qquad (EG-F^2)\rho^2+[gE-(f+f')F+eG]\rho+eg-ff'=0.$$

Se ne trae facilmente, calcolando i valori di E, F, G, e, f, f', g relativi alla particolare rappresentazione analitica da noi adottata, che, detti F_1, F_2 i fuochi del raggio g, lo scarto della normalità nel punto P, generico su questo stesso raggio, ha l'espressione

$$(9) \qquad \mu = 4 \frac{d^2 - \delta^2}{PF_1^{\,2} \cdot PF_2^{\,2}} = 4 \frac{d^2 - \delta^2}{(T^2 - \delta^2)^2},$$

dove T è l'ascissa di P rispetto al *punto medio* del raggio stesso. Quanto all'espressione di μ mediante i coefficienti delle forme di KUMMER nelle ipotesi più generali, essa è

$$(10) \qquad \mu = \frac{(f-f')^2(EG-F^2)}{[(EG-F^2)\rho^2 + (gE-[f+f']F+eG)\rho + eg - ff']^2}.$$

Lo scarto dalla normalità così definito, come risulta dalla definizione, oppure p. es. dalla (9), dipende dall'unità di misura adottata per le lunghezze; naturalmente si può introdurre uno *scarto relativo*, indipendente da tale scelta, come rapporto dei due scarti dalla normalità misurati in un punto variabile e in un punto fisso. P. es. per i punti di un dato raggio si può introdurre come *scarto relativo dalla normalità* il rapporto di μ al valore che questa assume in uno (qualunque) dei punti limiti, oppure anche la radice quadrata σ di questo rapporto, presa con segno determinato, cosicchè

$$(11) \qquad \sigma = \frac{d^2-\delta^2}{T^2-\delta^2} = \frac{(f-f')^2}{4[(EG-F^2)\rho^2 + (gE-[f+f']F+eG)\rho + eg - ff']}.$$

Osserviamo anche che lo scarto dalla normalità in un punto si può esprimere mediante quella che KUMMER ha chiamato *misura della densità* della congruenza nel punto stesso [1], la quale vale $1:(T^2-\delta^2)$; cosicchè, chiamando Δ e Δ_l rispettivamente la densità in P e in un punto limite, si ha

$$\mu = 4\Delta^2 : \Delta_l \,; \qquad \sigma = \Delta : \Delta_l .$$

Così definito lo scarto dalla normalità, si presenta la questione di vedere fin dove si può estendere il teorema di MALUS-DUPIN relativo alle congruenze normali. Naturalmente, avendo lo scarto un valore dipendente dal punto che si considera su un raggio della congruenza, e non risultando dalla rifrazione un modo di associare ai singoli punti del raggio incidente i singoli punti del raggio rifratto, l'interesse del paragone fra i due valori dello scarto, relativi alla congruenza oggettiva e a quella rifratta, si concentra nel punto di incidenza. Ora è notevole che, *se la superficie rifrangente è piana, lo scarto relativo dalla normalità* (nel punto di incidenza)

(1) Cfr. p. es. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* I, 3e Auflage, 1930; p. 300.

non è alterato dalla rifrazione. Invero, qualunque sia la superficie rifrangente, adottiamola come superficie di partenza per la congruenza data e per quella rifratta, distinguendo con un asterisco le varie quantità relative a quest'ultima. Allora (1) il rapporto τ dei due scarti relativi considerati, secondo la (11) dove si faccia $\rho=0$, è

$$\tau=\frac{(f-f')^2(e^*g^*-f^*f^{*\prime})}{(f^*-f^{*\prime})^2(eg-ff')}.$$

Ora, chiamando N l'indice di rifrazione, γ l'angolo di incidenza, e X, Y, Z i coseni direttori della normale alla S nel punto (x, y, z), per un conveniente orientamento dei raggi rifratti si ha

$$l^*=Nl+\beta X \text{ ecc.,} \quad \text{con } \beta^2+2\beta N\cos\gamma=1-N^2$$

cosicchè

$$\tau=1-\frac{\beta}{N}\frac{eD''-(f+f')D'+gD}{eg-ff'}+\frac{\beta^2}{N^2}\frac{DD''-D'^2}{eg-ff'},$$

dove D, D', D'' sono i coefficienti della seconda forma fondamentale della superficie rifrangente. Se questa è piana, $D=D'=D''=0$, e si conclude la proprietà enunciata (2).

(1) Supponiamo qui senz'altro che il raggio considerato non sia *normale* per la congruenza incidente (cioè supponiamo $f\neq f'$); e allora lo stesso vale per il raggio rifratto.

(2) Non è questo il solo caso in cui si estende il teorema di Malus-Dupin. Dall'ultima equazione scritta risulta facilmente che il valore locale dello scarto relativo viene anche conservato, *qualunque sia l'indice di rifrazione*, se la superficie rifrangente è una sviluppabile tale che i raggi della congruenza che partono dai punti di una generatrice formino con questa uno stesso angolo. In nessun caso ulteriore sussiste un risultato analogo, se la conservazione dello scarto relativo deve valere *per tutti i valori* dell'indice di rifrazione. - Le cose cambiano, se si toglie questa restrizione; p. es. si può ricercare per quali congruenze, e per quali superficie riflettenti la *riflessione* conserva quel valore locale. Si trova facilmente che ciò avviene quando sulla superficie riflettente il doppio sistema

$$(e+D\cos\gamma)du^2+(f+f'+2D'\cos\gamma)dudv+(g+D''\cos\gamma)dv^2=0$$

è coniugato (o eventualmente indeterminato). Questo doppio sistema si può interpretare geometricamente, p. es. come doppio sistema delle linee della superficie S che risultano (in punti corrispondenti) ortogonali alle corrispondenti linee della superficie ottenuta spiccando a partire da un punto fisso un segmento equipollente alla proiezione ortogonale di un vettore unitario diretto lungo il raggio della congruenza che esce da un punto variabile della S, proiezione eseguita sul piano tangente in questo stesso punto.

OSSERVAZIONE. — Se la congruenza è normale, la curvatura totale K di ciascuna delle ∞^1 sue traiettorie ortogonali, nel punto P variabile su un raggio avente i fuochi F_1, F_2, è legata a P dalla ovvia relazione

$$K = \frac{1}{PF_1 \cdot PF_2}.$$

Come si estende questa relazione a una congruenza non normale? Ritornando alle medesime particolarizzazioni adottate in principio, si trova facilmente per la curvatura della superficie (o meglio dell'elemento superficiale del second'ordine) quasi normale alla congruenza nel punto P il valore

$$K = \frac{1}{PF_1 \cdot PF_2}(1 - \sigma).$$