Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1933.

RECENSIONI

L. Bieberbach: *Differentialgeometrie.* Band 31 dei « Teubners Mathematische Leitfäden ». B. G. Teubner, 1932; pagg. VI+140.

Questo piccolo ma denso libricciuolo, che fa seguito agli altri dell'A., nella medesima collezione, relativi alla Geometria Analitica, alla Geometria Proiettiva [1], al Calcolo Infinitesimale e alla Teoria delle Funzioni, espone in forma elegante e concisa gli elementi della geometria differenziale metrica delle curve e delle superficie nello spazio ordinario. Questa esposizione, condotta con l'uso sistematico del Calcolo Vettoriale, riesce agile e perspicua, per quanto l'A. dedichi una cura minuziosa alla precisione e correttezza del linguaggio, specie nell'enunciare definizioni e teoremi. Senza dubbio si è ora in grado di sviluppare le teorie della geometria differenziale senza rinunciare nè ad esprimersi e ragionare in modo rigoroso, nè a valersi dell'aiuto dell'intuizione. Ma non credo che un uso avveduto di considerazioni infinitesimali sia da condannare in forma così recisa e sprezzante come sembra fare l'A. nella vivace Prefazione (pag. III): ove si parla, addirittura, di « saloppe Gedankengänge » e di « unsaubere Schlüsse »! Io penso che nessun metodo, nessun modo di ragionare sia da respingere *a priori*; tutto sta a sapersene servire [2].

Moderno sia nella forma che — per quanto la natura dell'argomento e lo spazio assai breve potevano consentire — nel conte-

[1] Ved. le recensioni di questi a p. 110 del vol. IX, 1930, e a p. 51 del vol. XI, 1932, di questo « Bollettino ».

[2] L'A. giunge a dire (p. 13) che l'uso delle frasi « in generale » e « punti infinitamente vicini » *spesso tradisce la cattiva formazione matematica di chi le adopera.* Se l'A. ha inteso, con queste parole, di sconsigliare l'uso di tali frasi ai principianti, cui esse possono offrire un troppo comodo paravento di vedute o risultati nebulosi, non gli si può dar torto; ma d'altra parte non bisognerebbe disconoscere che delle medesime frasi, attribuendovi un significato che ha soltanto quel grado d'imprecisione atto a far risparmiare complicazioni superflue, si sono valsi e si valgono tanto utilmente i più grandi e fecondi geometri.

nuto, e spesso illuminato da vedute originali, il volumetto risulta di interessante ed attraente lettura, e può effettivamente servire da agevole « guida » a chi voglia introdursi in questo vasto campo di studi e porsi in grado di leggere con profitto le opere maggiori.

Per le *curve piane* (Cap. I), oltre alle solite nozioni fondamentali di carattere locale: arco, normale, curvatura, formule di FRÉNET, evolute, inviluppi (1), l'A. svolge pure qualche primo elemento di uno studio « in grande »: esponendo una dimostrazione del « teorema dei quattro vertici » per le curve convesse (ovali), e alcune interessanti considerazioni sulle curve « di larghezza costante » e le loro evolute.

Nel Cap. II, dedicato alle *curve nello spazio euclideo ordinario*, mi limito a notare il modo un pò diverso dal solito seguito nel determinare le sviluppabili polare e rettificante; coerentemente alle vedute dell'A. sugli inviluppi. (Ved. nota (1)).

Assai più vasto dei primi due è il Cap. III, ove si svolge lo studio delle *superficie nello spazio euclideo.* L'A. giunge, nei riguardi della geometria *sulla superficie*, fino alle più essenziali proprietà delle geodetiche, del parallelismo di LEVI-CIVITA, del tensore di curvatura; della rappresentazione conforme, delle superficie a curvatura costante; nello studio delle superficie *in relazione con l'ambiente euclideo a tre dimensioni*, fino alle proprietà più interessanti delle linee asintotiche e di curvatura, alle formule di GAUSS e CODAZZI, ad una abbastanza ampia e penetrante investigazione sulle superficie minime.

Fra altre particolarità che pure sarebbero degne di nota mi limito a segnalare: la determinazione dell'elemento d'area su di una superficie quale unico integrale $\iint f du^1 du^2$ che soddisfi a queste

(1) L'A definisce (p. 18) quale *inviluppo* di un sistema ∞^1 di curve una curva non contenuta nel sistema, e in ciascun suo punto toccata da una curva del sistema; e critica l'altra definizione, spesso adottata, dell'inviluppo quale luogo (al variare di λ) delle posizioni limiti delle intersezioni delle curve λ e $\lambda + \Delta\lambda$ del sistema, per $\Delta\lambda \to 0$; osservando che, dal punto di vista reale, questa definizione non è applicabile al caso del sistema dei *cerchi osculatori* a una curva C, che hanno C come inviluppo secondo la prima definizione, mentre i cerchi osculatori in due punti di un arco di curva ove la curvatura non sia mai nulla *non hanno mai punti* (reali) *a comune.* Si potrebbe osservare che questo caso d'eccezione può presentarsi soltanto quando si tratti di uno di quelli che G. MAMMANA chiama *inviluppi di ordine superiore ad 1* (anzi, di ordine *pari*). Ved. la Nota: *Sugli inviluppi di ordine superiore dei sistemi di curve piane.* « Giornale di Matem. », vol. 65, 1927, pp. 1-20.

quattro condizioni: 1°) la funzione integranda in esso dipende soltanto da u^1, u^2, P, P_1, P_2 $\left(\text{ove } P = P(u^1, u^2) \text{ è il punto variabile sulla superficie, e } P_r = \frac{\partial P}{\partial u^r}\right)$; 2°) esso è invariante per movimenti nello spazio; 3°) esso è invariante per ogni trasformazione dei parametri u^1, u^2 che non muti l'orientazione della superficie (cioè della normale); 4°) esso è tale che se la superficie si riduce a un piano, e la regione a cui è estesa l'integrazione a un quadrato di lato 1, assuma il valore 1. Poi: la definizione di *curvatura geodetica* di una curva in relazione al parallelismo; le osservazioni circa il carattere di invariante topologico che ha la « curvatura integra » di una superficie chiusa; la definizione delle *geodetiche* mediante la condizione $\left.\frac{d}{d\varepsilon}\int_{s_0}^{s_1}\sqrt{P'^2(s, \varepsilon)}ds\right|_{\varepsilon=0} = 0$, $\left(P(s_0, \varepsilon) \text{ e } P(s_1, \varepsilon) \text{ intendendosi indipendenti da } \varepsilon\text{; ed essendo } P(s, 0) = P(s),\ P'(s, \varepsilon) = \frac{\partial P(s, \varepsilon)}{\partial s} \text{ e } P'^2(s, 0) = 1\right)$, di significato accessibile anche a chi non abbia nozioni di calcolo delle variazioni. Con procedimento analogo sono definite più oltre le *superficie minime*; le caratterizzazioni e rappresentazioni usuali vengono dedotte in modo agevole.

Svolgendo lo studio delle superficie qua e là, occasionalmente, l'A. introduce qualche elemento del calcolo differenziale assoluto; aggiunge poi alla fine del libro una rapida esposizione sistematica del *calcolo tensoriale*, con opportuni richiami e raffronti coi precedenti sviluppi geometrici. Debbo confessare però che di questo paragrafo di calcolo tensoriale, aggregato quasi come un'appendice, come una cosa a sè, non mi appare ben chiara l'utilità. Ad es. è certo didatticamente opportuno definire la derivata covariante a partire dal parallelismo (cfr. p. 129), ma io penso che debba farsi apparire ben chiaro — se si vuole fare della geometria — che questa derivazione, come tutto il calcolo tensoriale, non è che un *mezzo* per procedere oltre.

ENEA BORTOLOTTI

L. GODEAUX: *Leçons de géométrie projective.* (Paris, Hermann, 1933, pag. 230).

Questo volume riproduce il corso di lezioni di geometria proiettiva che l'A. tiene da varî anni nell'Università di Liegi. Il contenuto dell'opera, sotto più riguardi pregevole, è adeguato agli scopi modesti che l'A. si propone, e non presenta certo grandi novità, sia negli argomenti trattati che nel metodo di esposizione: ad ogni modo un lettore italiano non senza soddisfazione constaterà come qui, dalla scelta dei principî fondamentali allo sviluppo e concatenazione delle varie teorie, si segua sempre assai da vicino il modello offerto da un'opera ben nota di un autore italiano: l'ENRIQUES. Detto questo ci possiamo risparmiare un'analisi particolareggiata dell'opera, limitandoci a qualche osservazione di carattere generale e ad accenni su alcuni punti, ove più manifesta appare l'impronta personale dell'A..

La mancanza di qualsiasi commento atto a chiarire il contenuto intuitivo dei postulati (se si escludono quelli dell'*ordine*) e a giustificare le definizioni, e la mancanza assoluta di figure, sembrano denotare nell'A. una tendenza a respingere l'ausilio dell'intuizione, che, specie in un'opera didattica, lo scrivente non saprebbe approvare: se pure, allontanandosi dall'ENRIQUES, in questo l'A. è tornato a modelli da noi più lontani (non soltanto nel tempo) e certo autorevoli. È invece conforme alle vedute dell'ENRIQUES quella che porta l'A. alla rigorosa *esclusione degli immaginari* dalla sua trattazione: nel senso che questa si svolge sempre nel campo reale, pure non mancando poi l'interpretazione dei risultati ottenuti nel campo complesso. Le difficoltà e complicazioni inevitabili che una simile trattazione incontra sono affrontate e superate con sufficiente snellezza e semplicità di sviluppi.

Le coniche e i coni quadrici sono introdotti come figure fondamentali di polarità nel piano e nella stella; le quadriche, invece, con le loro generazioni mediante forme proiettive. In particolare si vengono così ad avere tre definizioni prettamente distinte pei coni quadrici, per le quadriche rigate e per quelle generali; pur non mancando poi l'opportuno collegamento, non mi sembra qui ben limpida l'armonia della trattazione.

Lo sviluppo delle varie teorie è sempre prettamente sintetico. Ma l'A. dà pure un rapido cenno sulla rappresentazione analitica delle proiettività tra forme di 1ª, 2ª o 3ª specie, giungendo, pel caso di forme sovrapposte, fino alla determinazione di forme canoniche per tutti i possibili tipi reali di omografie generali o speciali e di correlazioni involutorie. Per le omografie di un piano o di uno spazio in sè (Cap. VI ed XI) viene prima data in forma sintetica una completa classificazione, basata specialmente sulla nozione di elementi uniti (punto e retta; o punto e piano, rispettivamente) *associati*. (Cfr. ENRIQUES, 4ª ediz., p. 184). Lo studio delle proiettività tra forme di 2ª o di 3ª specie è svolto un pò più ampiamente che d'ordinario, anche nei riguardi delle particolarizzazioni metriche; a questo proposito è da notarsi che lo studio dei gruppi delle similitudini e delle congruenze nel piano o nello spazio viene basato su uno studio più generale che prima viene fatto sui gruppi delle omografie piane aventi una retta unita, e permutabili con una involuzione ellittica data su questa; e delle omografie spaziali aventi un piano unito, e permutabili con una polarità uniforme data su questo.

Notiamo ancora (a p. 134 e seg.) lo studio delle intersezioni di due coniche, ricondotto a quello dell'omografia prodotto delle polarità rispetto ad esse.

ENEA BORTOLOTTI

J. HADAMARD: *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles lineaires hyperboliques.* Editore Hermann, Parigi 1932.

Questo libro, che è una traduzione, con assai notevoli aggiunte, dell'altro (in inglese) nel quale J. HADAMARD raccolse le lezioni tenute all'Università di Yale nel 1920, era da tempo atteso con vivo desiderio dal pubblico matematico. Cercheremo di dare un'idea del suo contenuto.

Come è noto, per un'equazione del tipo:

$$F(u) = \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f \tag{1}$$

(u funzione incognita delle variabili $x_1 \dots x_n$; A_{ik}, B_i, C, f funzioni note delle stesse variabili) si denomina problema di CAUCHY il problema di determinare una soluzione della (1) assegnati su una varietà S_0 ad $n-1$ dimensioni dello spazio $x_1 \dots x_n$ i valori (dati di CAUCHY) u_0 e u_1 della u e di una sua derivata prima secondo una assegnata direzione non tangente a S_0. Nella ipotesi che i coefficienti della (1) siano analitici e che analitici siano pure i dati di CAUCHY, un classico teorema (CAUCHY-KOWALEWSKI) assicura per il problema enunciato l'esistenza, nelle immediate vicinanze della varietà S_0, di una e una sola soluzione analitica se S_0 non è una varietà caratteristica per la (1), cioè se lungo S_0 non si ha

$$\sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial G}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_k} = 0, \tag{2}$$

posto che l'equazione di S_0 sia $G(x_1 \dots x_n) = 0$; le varietà S_0 caratteristiche per la (1) corrispondono a casi nei quali il problema della determinazione di detta soluzione analitica diventa impossibile o indeterminato.

Ma può interessare (come effettivamente avviene nello studio di problemi fisici che conducono ad equazioni del tipo (1)) di risolvere il problema di CAUCHY quando i dati u_0 e u_1 non sono funzioni analitiche ma soltanto regolari (continue e con derivate continue fino ad un certo ordine) e non analitici sono magari anche i coefficienti della (1); in quanto alla funzione u che si tratta di determinare, può non essere richiesto che essa sia analitica (e cioè definibile anche nel campo complesso) ma essere richiesto invece che il suo campo (reale) di esistenza non sia limitato alle immediate vicinanze della varietà S_0. Limitandosi allora al campo reale, ci si può domandare se in queste condizioni il problema di CAUCHY (che chiameremo, per intenderci, problema di CAUCHY generalizzato) è un problema *correttamente posto*, cioè se ammette una e una sola soluzione. La risposta a tale domanda è diversa secondo i varî tipi di equazioni (1). Come è noto, le equazioni (1) per le quali il discriminante della forma quadratica

$$\mathfrak{A}(\gamma_1 \dots \gamma_n\, x_1 \dots x_n) = \sum_{i,k} A_{ik}\gamma_i\gamma_k \tag{3}$$

è (in una certa regione di spazio) diverso da 0, diconsi di *tipo ellittico* o di *tipo iperbolico* secondo che la (3) è o no una forma definita (in corrispondenza le caratteristiche della (1) sono immaginarie o reali). Un'equazione (1) a più di due variabili si dice di tipo *iperbolico normale* quando ridotta, con un'opportuna trasformazione lineare, la (3) alla forma $\sum_1^n{}_r A_r\gamma_r^2$, tutti i coefficienti A_r, tranne A_n, hanno il medesimo segno.

Con considerazioni assai interessanti HADAMARD giunge alla conclusione che il problema generalizzato di CAUCHY non è mai *correttamente posto* per equazioni di tipo ellittico e può esserlo per equazioni di tipo iperbolico solo se queste rientrano nel tipo che abbiamo denominato normale.

Limitiamoci, con HADAMARD, a considerare d'ora in poi solo equazioni di tipo iperbolico normale.

Per particolari equazioni di tale tipo il problema (generalizzato) di CAUCHY fu da tempo risolto mediante formule, ormai classiche, che HADAMARD ricorda nel suo libro. Nel caso di due variabili si ha il celebre metodo di RIEMANN; per l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = 0 \tag{4}$$

valgono le formule di POISSON e di KIRCHHOFF; per l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x_1 x_2 x_3) \tag{5}$$

il metodo di VOLTERRA risolve il problema in questione.

Per il caso di due variabili, RIEMANN nella costruzione della soluzione fece intervenire in modo essenziale le varietà caratteristiche (di cui si è fatto parola) che, nel detto caso, sono linee. VOLTERRA, con il metodo dato per la (5), mostrò (prima ancora che una teoria delle caratteristiche fosse stabilita per il caso di più di due variabili) che delle particolari varietà (che oggi sappiamo essere particolari caratteristiche) hanno, nella risoluzione del problema generalizzato di CAUCHY relativo ad un'equazione con più di due variabili, un ruolo fondamentale analogo a quello che le linee caratteristiche hanno nel metodo di RIEMANN; per la (5) tali varietà sono i coni $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 - (x_3 - a_3)^2 = 0$ da VOLTERRA chiamati coni caratteristici. Notevoli estensioni del metodo di VOLTERRA ad altre particolari equazioni furono fatte da D'ADHÉMAR, COULON, TEDONE.

HADAMARD si è proposto di estendere il metodo di VOLTERRA (opportunamente modificato e completato) ad una generica equazione di tipo iperbolico normale e di ottenere delle formule generali in cui rientrino quelle relative ai casi particolari già risoluti. Cercheremo di dare un'idea dei procedimenti con i quali l'A. ha raggiunto il suo scopo.

Consideriamo insieme con la (1) l'equazione aggiunta

$$G(v) = \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(A_{ik} v) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(B_i v) + Cv = 0. \tag{6}$$

Riprendiamo la forma (3) e supponiamo siano $\pi_1 \dots \pi_n$ i coseni direttori della normale ad una varietà chiusa S ad $n-1$ dimensioni; in ogni punto di S si dà il nome di *trasversale* alla direzione ν i cui coseni direttori sono proporzionali a $\frac{\partial \mathfrak{A}(\pi_1 \dots \pi_n\, x_1 \dots x_n)}{\partial \pi_1} \dots$ $\dots \frac{\partial \mathfrak{A}(\pi_1 \dots \pi_n\, x_1 \dots x_n)}{\partial \pi_n}$ (tale direzione fu introdotta nello studio del problema di CAUCHY relativo alla (5) da D'ADHÉMAR con il nome di *conormale*); ν appartiene al piano tangente a S in un suo punto solo se in tale punto S è tangente ad una caratteristica. Consideriamo la porzione T dello spazio $x_1 \dots x_n$ limitata da S e due funzioni u, v che in T siano continue insieme con le loro derivate prime; supponiamo che la stessa condizione sia verificata per i coefficienti della (1) e le loro derivate prime. Si può allora (scelto convenientemente il senso positivo di ν) stabilire la formula di reciprocità:

$$\iint_T \cdots \int [vF(u) - uG(v)]dT = -\int_S \cdots \int \left[v \frac{du}{d\nu} - u \frac{dv}{d\nu} + Luv\right] dS, \tag{7}$$

dove $L = \sum_i \pi_i \left(B_i - \sum_k \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} \right)$.

Per un punto $P(a_1 \dots a_n)$ consideriamo le bicaratteristiche della (1), cioè le caratteristiche di CAUCHY relative all'equazione del primo ordine (2), cioè le curve $x_i = x_i(s)$ uscenti da P, soddisfacenti il sistema

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{A}(p_1 \dots p_n\, x_1 \dots x_n)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{A}(p_1 \dots p_n\, x_1 \dots x_n)}{\partial x_i} \tag{8}$$

e tali che i valori delle x e delle p nel punto $P(s=0)$ soddisfino $\mathfrak{A} = 0$. Il luogo delle bicaratteristiche uscenti da P è una varietà caratteristica, avente P come punto conico, che prende il nome di *conoide caratteristico*; essa si riduce ad un ipercono se i coefficienti A_{ik} sono costanti; in particolare per la (5) coincide con il cono caratteristico introdotto da VOLTERRA. Del conoide caratteristico relativo al punto $P(a_1 \dots a_n)$ si può scrivere l'equazione: $\Gamma(a_1 \dots a_n\, x_1 \dots x_n) = 0$. Se la (1) è, come abbiamo supposto, di tipo iperbolico normale il conoide caratteristico è a due falde e divide lo spazio intorno a P in tre parti, due interne ($\Gamma > 0$) e una esterna ($\Gamma < 0$). Supponiamo che per tutti i punti P di una certa regione di spazio una falda del conoide caratteristico di vertice P intercetti una parte finita $S_0{}^p$ di una varietà ad $n-1$ dimensioni S_0, formando con questa il contorno completo di una porzione di spazio contigua a P. Riprendiamo la (7) e identifichiamo T con la detta porzione di spazio; il contorno S che compare a secondo membro sarà costituito da una falda del conoide $\Gamma = 0$ e dalla parte $S_0{}^p$ di S_0. Prendiamo per u una soluzione della (1) e per v una conveniente soluzione dell'equazione aggiunta (6). Occorre scegliere v (con una opportuna singolarità in P) in modo che dalla (7) si possa avere il valore di u in P per mezzo dei valori di u e $\frac{du}{d\nu}$ su $S_0{}^p$.

HADAMARD, supposta a questo punto l'equazione (iperbolica normale) (1) a coefficienti analitici, si basa sul seguente teorema (valido anche per equazioni ellittiche): Ogni equazione (1), supposta analitica, ammette sempre una *soluzione elementare* avente come polo un punto P arbitrario; se $\Gamma = 0$ è l'equazione del conoide caratteristico di vertice P, la soluzione elementare nel caso di n dispari è della forma $\frac{U_1}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}}$ dove U_1 è una determinata funzione olomorfa, nel caso di n pari è della forma $\frac{U_1}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} - U_2 \log \Gamma$ dove U_2 è un'altra funzione olomorfa. L'A. mostra come possano calcolarsi i coefficienti degli sviluppi di U_1 e U_2 in serie di potenze di Γ, sviluppi di cui dimostra la convergenza, almeno in un conveniente campo nell'intorno di P; fa vedere inoltre a che cosa si riducano queste soluzioni elementari per particolari, classiche equazioni. Dette soluzioni elementari sono singolari non solo in P, ma lungo tutto il conoide caratteristico di vertice P (come la soluzione $\frac{1}{r}$ dell'equazione di LAPLACE è singolare lungo tutto il cono isotropo $r^2 = 0$, che non è altro che il conoide caratteristico, immaginario, di detta equazione).

Consideriamo il caso di n dispari ($n = 2n_1 + 1$) e vediamo se nella (7) possa prendersi per v la soluzione elementare dell'equazione aggiunta (6). Se la (1) si identifica per es. con la (5), tale soluzione elementare è:

$$v = \frac{1}{\sqrt{(x_3 - a_3)^2 - (x_1 - a_1)^2 - (x_2 - a_2)^2}}. \tag{9}$$

Una tale funzione non può sostituirsi nella (7) neppure escludendo il punto P con un conveniente tratto di superficie che poi si faccia tendere a P perchè, dato l'ordine d'infinito lungo la superficie del conoide Γ delle quantità sotto il segno d'integrale, alcuni degli integrali non avrebbero senso (un'osservazione analoga vale per il caso generale). VOLTERRA non si vale della (9) ma di una funzione ottenibile dalla (9) mediante un'integrazione (tra convenienti limiti) rispetto ad a_3; funzione per cui tutta la linea $x_1 = a_1$ $x_2 = a_2$ è singolare; escludendo con una superficie tubulare di diametro che poi fa tendere a 0 questa linea, dalla formula di reciprocità ottiene in un primo tempo un'altra formula che dà il valore dell'integrale di u lungo la detta linea; con una derivazione rispetto ad a_3 ottiene poi il valore di u in P. HADAMARD indica come si potrebbe nel caso generale seguire lo stesso metodo, ma osserva che si può evitare di eseguire prima delle integrazioni sulla soluzione elementare e poi delle derivazioni sulla formula che si ottiene da quella di reciprocità, se si fa uso della nozione di *parti finite d'integrali infiniti.* (Al chiarimento di tale nozione l'A. dédica diverse pagine del suo libro).

Ricordiamo che per parte finita di $\int_a^b \frac{A(\xi)d\xi}{(b-\xi)^{p+\frac{1}{2}}}$ (p intero positivo), che si denota sovrapponendo all'integrale il segno $\overline{}$, s'intende il $\lim_{x=b}\left[\int_a^x \frac{A(\xi)}{(b-\xi)^{p+\frac{1}{2}}}d\xi + \frac{B(x)}{(b-x)^{p-\frac{1}{2}}}\right]$ dove $B(x)$ è una funzione soggetta solo alle condizioni: 1°) che il limite esista; 2°) che almeno nelle vicinanze di $x=b$, B ammetta p derivate. (Il valore del limite è indipendente dalla scelta di B). Il concetto di parte finita di un integrale infinito può introdursi anche per integrali multipli. Sia per es. l'integrale triplo $\iiint \frac{A(x_1x_2x_3)}{[G(x_1x_2x_3)]^{p+\frac{1}{2}}}dT$; supponiamo che del contorno di T faccia parte la superficie (regolare) $G=0$. Escludiamo la parte di T contigua a detta superficie mediante un'altra superficie $G(x_1x_2x_3)=\gamma(x_1x_2x_3\varepsilon)$, dove γ e le sue derivate fino all'ordine p tendono a 0 con ε; il limite per $\varepsilon=0$ della somma dell'integrale esteso alla rimanente parte T_1 di T e di un conveniente termine del tipo $\frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-\frac{1}{2}}}$ è la parte finita dell'integrale considerato. Se la superficie $G=0$ ha (come nel caso del conoide caratteristico) un punto singolare, si deve escluderlo con una piccola porzione di superficie e poi passare al limite.

Nel caso che stiamo considerando di n dispari nella (7) si può sostituire a v la soluzione elementare dell'equazione aggiunta (6), dopo aver escluso il punto P con un conveniente tratto di superficie Σ, se degli integrali si prendono le parti finite. Facendo tendere Σ a 0 si ottiene la formula risolutiva:

$$(10)\quad (-1)^{n_1}\frac{\Omega_{2n_1-1}}{C_{n_1-1}}u_P = -\overline{\int\!\!\int\ldots\int vfdT} + \overline{\int\ldots\int\left(u\frac{dv}{d\nu} - v\frac{du}{d\nu} - Luv\right)dS_0{}^P}$$

dove Ω_{2n_1-1} è l'area della superficie ipersferica di raggio 1 dello spazio a $2n_1$ dimensioni e $C_{n_1-1}=\frac{\Gamma\left(n_1-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n_1)}$.

Resta da fare la *sintesi della soluzione* e cioè da verificare se, dati a piacere i valori su S_0 di u e $\frac{du}{d\nu}$, il secondo membro della (10) (diviso per il coefficiente di u_P a primo membro) rappresenta una funzione, delle variabili $a_1 \dots a_n$, che soddisfa la (1) e le condizioni al contorno. Per verificare che soddisfa la (1) basta tener presente la proprietà che la soluzione elementare v dell'equazione aggiunta quando sia considerata come funzione delle a, anzichè delle x, è soluzione della (1) col secondo membro nullo; tener presente inoltre la proprietà, inerente al simbolo $|\overline{\quad\quad}$, che le derivazioni rispetto ai parametri a_i (i quali influiscono sul campo d'integrazione) basta eseguirle sotto il segno d'integrale. Perchè risultino verificate le condizioni al contorno è necessario e sufficiente che S_0 in ogni suo punto sia esterna alle falde del conoide caratteristico Γ con vertice nel punto stesso. (Diremo, con HADAMARD, che S_0 deve avere una *orientazione di spazio* rispetto a Γ). Se un tratto di S_0 è costituito da una varietà caratteristica, lungo esso la conoscenza di u porta di conseguenza quella di $\frac{du}{d\nu}$.

Per il caso di n pari l'A. risolve il problema (del quale indica anche una soluzione diretta) con il *metodo* che egli chiama di *discesa*, a cui ora accenneremo. Supponiamo nella (1) $n = 2n_1$; associamo al punto $(x_1 \dots x_n)$ dello spazio E_n i punti $(x_1 \dots x_n z)$, con z arbitrario, dello spazio E_{n+1}; in particolare al punto $P(a_1 \dots a_n)$ i punti $P'(a_1 \dots a_n c)$. Consideriamo insieme con la (1) l'equazione:

$$F(u') - \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} = f(x_1 \dots x_n). \tag{1'}$$

Se $\Gamma = 0$ è l'equazione del conoide caratteristico relativo alla (1) e al punto P, $\Gamma' = \Gamma - (z - c)^2 = 0$ sarà quella del conoide caratteristico relativo alla (1') e a un punto P'. I dati di CAUCHY relativi alla (1) siano i valori di u e $\frac{du}{d\nu}$ su una varietà (non caratteristica) S_0, ad $n - 1$ dimensioni, di E_n. Consideriamo in E_{n+1} l'ipercilindro S_0' che ha per proiezione (su $z = 0$) S_0; se S_0 ha un'*orientazione di spazio* rispetto a Γ, S_0' la ha rispetto a Γ'. Risolviamo, come precedentemente si è indicato, il problema di CAUCHY per la (1') (che ha un numero dispari di variabili) assegnando per u' e $\frac{du'}{d\nu}$ in ogni punto di S_0' valori uguali a quelli assegnati per u e $\frac{du}{d\nu}$ nel punto corrispondente di S_0; poichè i dati di CAUCHY relativi alla (1') sono indipendenti da z, la soluzione u' della (1') risulterà indipendente da z e soddisferà quindi la (1); poichè inoltre soddisfa evidentemente le condizioni date per u lungo S_0, u' sarà la soluzione richiesta del problema di CAUCHY relativo alla (1). (Come ha dimostrato HOLMGREN il problema non può ammettere più di una soluzione). Nella formula che così si ottiene (analoga alla (10)) compaiono però in tal modo elementi relativi allo spazio E_{n+1} (in particolare la soluzione elementare relativa all'aggiunta di (1')) che occorre eliminare. L'A. mostra come si possa pervenire a tale scopo e ottiene così una formula risolutiva contenente solo elementi relativi allo spazio E_n e all'equazione (1). Tale formula differisce da quella relativa al caso di n dispari sia perchè in essa non compare la soluzione elementare relativa all'equazione (6) aggiunta della (1), $v = \frac{V_1}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} - V_2 \log \Gamma$, ma solo e separatamente le funzioni (olomorfe) V_1 e V_2, sia perchè in essa non vi sono da considerare parti finite d'integrali infiniti.

HADAMARD studia quale sia il campo di validità delle soluzioni date direttamente dalle sue formule e come le soluzioni stesse possano essere prolungate; fa vedere inoltre come nelle dette formule rientrino, come casi particolari, classiche formule cui già abbiamo accennato. Passa poi a considerare il caso nel quale i coefficienti della (1) non sono analitici, ma solo regolari, e indica come i risultati ottenuti possano estendersi a questo caso.

Vengono anche dall'A. considerati e posti in relazione con il problema di CAUCHY i così detti *problemi misti* relativi alla (1), cioè i problemi (cui spesso conducono questioni di fisica) di determinare una soluzione della (1) quando la varietà che abbiamo denotata con S_0 ha tratti che hanno e tratti che non hanno *orientazione di spazio* e sui primi di tali tratti sono assegnati i dati di CAUCHY, mentre sui secondi è assegnato solo il valore di u o quello di $\frac{du}{d\nu}$.

Assai interessanti sono nel libro dell'HADAMARD i passaggi nei quali i risultati ottenuti sono posti in relazione con la teoria delle onde, a cui l'A., come è ben noto, ha dato tanto notevoli contributi.

Termineremo osservando che in questa nuova edizione della sua opera HADAMARD, ispirandosi ai concetti della teoria della relatività e del calcolo differenziale assoluto, ha voluto anche mostrare come ai suoi risultati si possa dare forma invariantiva rispetto a trasformazioni di variabili.

ELENA FREDA

A. GAY: *Recherches sur l'hydrodynamique des liquides visqueux.* Prefazione di H. VILLAT. Un volume delle « Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'air (service des recherches de l'aéronautique) 1931. In vendita presso Gauthier-Villars e presso Blondel La Rougery (Paris).

L'Autore si propone lo studio del moto di un solido in un liquido viscoso indefinito, di cui venga supposto lento il movimento.

Nella introduzione, dopo il richiamo deî classici lavori dello STOKES e del BOUSSINESQ, troviamo quello relativo a risultati generali del CRUDELI, poi a lavori del BASSET, dell'HAVELOCKE, dell'OSEEN, dell'ODQUIST e del PICCIATI.

Nella introduzione stessa figura un breve sunto dell'opera, dal quale rilevasi come l'Autore, pur limitandosi al caso del cilindro indefinito, abbia saputo ridursi, nei riguardi dello studio della velocità del liquido, ad un sistema di equazioni integrali di tipo misto VOLTERRA–FREDHOLM, del quale la soluzione viene a dipendere da un problema di NEUMANN.

Le equazioni del moto del cilindro sono studiate nel caso del movimento orizzontale ed in quello verticale. In quest'ultimo caso l'Autore perviene ad un'equazione integro–differenziale del VOLTERRA, la quale generalizza quella del pendolo semplice affetto da ereditarietà.

Il caso particolare del cilindro rotondo forma oggetto di un capitolo, in cui si dimostra come, sotto una certa condizione, il moto del solido dipenda da un'equazione del VOLTERRA di prima specie ottenuta dal BOUSSINESQ, la quale si presenta suscettibile di essere integrata col metodo del WHITTAKER. (*ares*)

ENRIQUE BUTTY: *Introdución a la Fisica Matemática.* Vol. I, pagine 410, Buenos Aires, 1931.

Questo volume dell'egregio prof. E. BUTTY della Facoltà di Scienze di Buenos Aires contiene una esposizione del Calcolo vettoriale e tensoriale come introduzione alla trattazione di alcuni problemi di meccanica e fisica–matematica che l'A. si propone di presentare in un secondo volume.

Nel Calcolo vettoriale Egli segue in gran parte l'opera di BURALI–FORTI e MARCOLONGO, svolgendo ciò che è necessario per le più classiche applicazioni geometriche e meccaniche con precisione e grande chiarezza.

Il Calcolo tensoriale è introdotto nella solita forma, salvo l'uso qua e là dei simboli e delle operazioni vettoriali che ne rendono l'esposizione più semplice ed espressiva. Vi sono varî capitoli sugli operatori differenziali degli scalari e dei vettori e sui classici teoremi di GAUSS, di GREEN e di STOCKES con applicazione ai più semplici e interessanti campi vettoriali.

La terza parte del libro è dedicata allo studio particolareggiato dei tensori di secondo grado, ossia delle ordinarie omografie vettoriali negli spazi a tre e a due dimensioni. Ma qui la trattazione diversifica da quella di BURALI-FORTI e MARCOLONGO, giacchè l'A. le rappresenta in sostanza mediante matrici, malgrado il simbolismo vettoriale che spesso adopera.

In complesso il libro è ottimo per la chiarezza dell'esposizione e raggiunge pienamente lo scopo di offrire allo studioso lo strumento matematico meglio adatto per la trattazione di molti problemi della meccanica e della fisica. A noi italiani fa molto piacere il vedere con quanto interesse si segua a Buenos Aires gli studi che son stati fatti in Italia su cotesta materia. *p. b.*