BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

K. H. GROSSMANN

Sul Movimento relativo

* Da una lettera al prof. Tullio Levi-Civita

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 12 (1933), n.1, p. 27-31.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_1_27_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_1_27_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1933.

Sul Movimento relativo.

(Da una lettera al prof. TULLIO LEVI-CIVITA).

Nota di K. H. GROSSMANN (a Zurigo).

Mi permetta di comunicarle un'osservazione sul « Movimento relativo » che potrebbe avere un certo interesse didattico.

Si può modificare la dimostrazione del teorema del CORIOLIS che si trova nell'opera LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale* (volume primo, IV, 2, 3). La modificazione risulta dalle due considerazioni seguenti:

1°) Una dimostrazione di proprietà vettoriali, per apparire veramente persuasiva ai principianti, deve operare su ciò che formalmente costituisce un vettore, vale a dire sulle sue componenti.

2°) Si ricorre — idea familiare ai miei maestri PAUL DEBYE e ERNST MEISSNER — all'espressione per la derivata vettoriale rispetto ad assi in moto, che si può vantaggiosamente ricavare attraverso le componenti, come passo a mostrare.

1. Lemma. — Uno spazio si muova rispetto ad uno spazio detto fisso, Ω essendo la velocità angolare istantanea dello spazio mobile, v_0 la velocità di un suo punto O .

Sia w un vettore qualunque, e sia $\left(\frac{dw}{dt}\right)_a$ la sua derivata temporale assoluta, con che si vuol dire la derivata relativa allo spazio fisso, cioè il vettore di cui la componente secondo una retta fissa è la derivata temporale della componente di w secondo la retta.

La componente di w secondo una retta dello spazio mobile è

$$e \times w,$$

essendo e il vettore unitario nella direzione della retta.

La derivata temporale di questa componente sarà

$$(1) \quad \frac{d}{dt}(e \times w) = e \times \left(\frac{dw}{dt}\right)_a + \Omega \wedge e \times w = e \times \left(\left(\frac{dw}{dt}\right)_a - \Omega \wedge w\right).$$

La componente del vettore

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_a - \Omega \wedge w$$

secondo una retta *mobile* è dunque la derivata temporale della componente di w secondo la retta. In altre parole: Questo vettore è la derivata temporale *relativa* di w , cioè la sua derivata relativa allo spazio mobile. Chiamandola $\left(\frac{dw}{dt}\right)_r$, si ha:

$$(2) \quad \left(\frac{dw}{dt}\right)_r = \left(\frac{dw}{dt}\right)_a - \Omega \wedge w.$$

2. Prima applicazione: Velocità e accelerazione radiali e trasverse. — Siano, in un piano, O un punto fisso, P un punto mobile, e il vettore unitario nella direzione del raggio vettore $\overline{OP} = r$. Sia f il vettore unitario che si ottiene rotando e di un angolo retto nel senso positivo, e sia Ω la velocità angolare istantanea (rispetto al piano fisso) del piano che ruota intorno ad O colla retta di r . Essendo Ω la componente di Ω secondo la normale (debitamente orientata) al piano ($\Omega = \pm |\Omega|$), si ha:

$$\Omega \wedge r = \Omega r f.$$

A norma della (1), la derivata $\dot{r}$ della componente r di r secondo la sua retta differisce per la componente zero del vettore $\Omega \wedge r$ secondo la retta dalla componente radiale v_ρ della velocità

$$v = \left(\frac{dr}{dt}\right)_a.$$

$$\therefore v_\rho = \dot{r}.$$

La componente trasversa v_θ di v differisce dalla derivata nulla della componente nulla di r secondo la retta di f per la rispettiva componente Ωr di $\Omega \wedge r$.

$$\therefore v_\theta = r\Omega.$$

La (1) fornisce anche la componente radiale $a_\rho = e \times \left(\frac{dv}{dt}\right)_a$ e trasversa $a_\theta = f \times \left(\frac{dv}{dt}\right)_a$ dell'accelerazione $a = \left(\frac{dv}{dt}\right)_a$:

$$\frac{dv_\rho}{dt} = \ddot{r} = e \times \left(\frac{a}{dt} - \Omega \wedge v\right)$$

$$\therefore a_\rho = e \times \frac{a}{dt} = \ddot{r} + e \times \Omega \wedge v_0 f = \ddot{r} - r\Omega^2.$$

$$\frac{dv_\theta}{dt} = \frac{d(r\Omega)}{dt} = f \times \left(\frac{a}{dt} - \Omega \wedge v\right)$$

$$\therefore a_\theta = f \times \frac{a}{dt} = \frac{d(r\Omega)}{dt} + f \times \Omega \wedge v_0 e = r\dot{\Omega} + 2r\Omega.$$

3. Seconda applicazione: Accelerazione tangenziale e normale. — La prima delle formule del FRENET:

$$\frac{dt}{ds} = cn,$$

o:

$$\frac{dt}{dt} = cvn$$

mostra che la velocità angolare istantanea Ω con cui si muove il triedro principale t, n, b è un vettore parallelo al piano (b, t) . Chiamando Ω_b la sua componente secondo la binormale, si ha:

$$\frac{dt}{dt} = \Omega_b b \wedge t = \Omega_b n = cvn$$

$$\therefore \Omega_b = cv.$$

$$\therefore \Omega \wedge v = \Omega_b b \wedge v = \Omega_b v b \wedge t = \Omega_b v n = cv^2 n.$$

La derivata temporale $\dot{v}$ della componente v di v secondo la tangente (mobile) differisce, secondo la (1), dalla componente tangenziale a_t dell'accelerazione $a = \frac{dv}{dt}$ per la componente zero di $\Omega \wedge v$ secondo la tangente.

$$\therefore a_t = \dot{v}.$$

La derivata temporale zero della componente zero di v secondo la normale principale differisce dalla componente normale a_n dell'accelerazione per la componente cv^2 di $\Omega \wedge v$ secondo la normale principale:

$$\therefore a_n = cv^2.$$

Siccome $\Omega \wedge v$ è perpendicolare alla binormale, la componente a_b di a secondo la binormale è eguale alla derivata nulla della componente nulla di v secondo la binormale:

$$a_b = 0.$$

4. Teorema del Coriolis. — Sia F un punto dello spazio fisso, O un punto dello spazio mobile, e P un punto che si muove per conto proprio in un modo qualunque. Siano $\overline{FO} = s$, $\overline{OP} = r$ e $\overline{FP} = q$, con che

$$q = s + r.$$

DEFINIZIONE. — La derivata temporale assoluta di q

$$\left(\frac{dq}{dt} \right)_a = v_a$$

si chiama la *velocità assoluta* del punto P .

DEF. — La derivata temporale relativa di $\mathbf{r}$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r = \mathbf{v}_r.$$

si chiama la *velocità relativa* di P .

DEF.:

$$\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}$$

è la *velocità di trascinamento* di P , $\mathbf{v}_0 = \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)_\alpha$ essendo la velocità assoluta di O .

Dunque:

$$\mathbf{v}_\alpha = \left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)_\alpha + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_\alpha = \mathbf{v}_0 + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_\alpha.$$

Ma, secondo la (2):

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_\alpha = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}.$$

Ne segue:

$$(3) \quad \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r = \mathbf{v}_\tau + \mathbf{v}_r.$$

DEF. — La derivata temporale assoluta di $\mathbf{v}_\alpha$

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt}\right)_\alpha = \mathbf{a}_\alpha$$

si chiama l'*accelerazione assoluta* di P .

DEF. — La derivata temporale relativa di $\mathbf{v}_\tau$

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_\tau}{dt}\right)_r = \mathbf{a}_r$$

si chiama l'*accelerazione relativa* di P .

DEF. — $\mathbf{a}_\tau$, l'*accelerazione di trascinamento*, è l'accelerazione assoluta che avrebbe P se fosse

$$\mathbf{v}_r = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_r = 0.$$

Allora, secondo la (3), si avrebbe:

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_\tau,$$

e, secondo la (2):

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\alpha\tau} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r},$$

l'indice τ designando che P è considerato solidale col sistema mobile.

Dunque :

$$\mathbf{a}_\tau = \left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right)_{a\tau} = \left(\frac{d\mathbf{v}_\tau}{dt} \right)_{a\tau} = \left(\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \right)_a + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \wedge \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}).$$

Siccome

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_\tau}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right)_a + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \wedge \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_a,$$

e, secondo la (2),

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_a = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r},$$

si ottiene :

$$(4) \quad \underline{\left(\frac{d\mathbf{v}_\tau}{dt} \right)_a = \mathbf{a}_\tau + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r.}$$

Segue dalla (3) che

$$\mathbf{a}_a = \left(\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\mathbf{v}_\tau}{dt} \right)_a + \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right)_a.$$

Ma, secondo la (2):

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} \right)_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r = \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r.$$

Ne segue, tenendo conto della (4):

$$\underline{\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\tau + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r.}$$