Bollettino Unione Matematica Italiana

Tommaso Salvemini

Una formula relativa al Calcolo combinatorio

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.1, p. 25–27.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_1_25_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1933.

Una formula relativa al Calcolo combinatorio.

Nota di T. SALVEMINI (a Roma).

Sunto. - *L'A. dimostra una proprietà relativa al Calcolo combinatorio e utile per il Calcolo delle probabilità.*

Non mi risulta trattata altrove la seguente proprietà di cui ho avuto bisogno in una ricerca di Calcolo delle probabilità.

Data la successione

$$\text{(I)}\qquad \binom{n}{0},\ (-1)^1\binom{n}{1},\ (-1)^2\binom{n}{2},\dots,\ (-1)^i\binom{n}{i},\dots \\ \dots,\ (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1},\ (-1)^n\binom{n}{n}$$

con n *intero positivo qualunque, se moltiplichiamo i primi* $n-k+1$ *numeri della* (I) *rispettivamente per*

$$\binom{n}{k}0^\alpha,\ \binom{n-1}{k}1^\alpha,\ \binom{n-2}{k}2^\alpha,\dots,\ \binom{k}{k}(n-k)^\alpha,$$

dove $k=0,\ 1,\dots,\ n-1$ *e* α *è un intero maggiore o uguale a zero* (in quest'ultimo caso conveniamo che $0^0=1$) *tale però che* $n-k>\alpha$, *la somma dei prodotti ottenuti è uguale a zero, cioè:*

$$\text{(II)}\qquad \sum_{0}^{n-k}{}_i(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n-i}{k}i^\alpha=0.$$

Un semplice calcolo traduce questa proprietà in un'altra più espressiva. Infatti, per $i\leq n-k$,

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}\cdot\frac{(n-i)\dots(n-i-k+1)}{k!}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{i},$$

e la (II) si trasforma in

$$\binom{n}{k}\sum_{0}^{n-k}{}_i(-1)^i\binom{n-k}{i}i^\alpha=0;$$

allora, ponendo n al posto di $n-k$, la precedente proprietà si traduce nella seguente espressa simbolicamente da:

$$\text{(III)}\qquad \sum_{0}^{n}{}_i(-1)^i\binom{n}{i}i^\alpha=0 \qquad \text{per } 0\leq\alpha<n,\ 0^0=1.$$

Per dimostrare la (III) si osservi anzitutto che essa è vera per $\alpha=0$, perchè esprime la nota proprietà

$$\sum_{0}^{n}{}_i(-1)^i\binom{n}{i}=0.$$

Per $\alpha=1$, si osservi che il termine della (III) che corrisponde a $i=0$ è nullo e che, per $i>1$,

$$\binom{n}{i}i=\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{(i-1)!}=n\binom{n-1}{i-1},$$

e perciò il primo membro della (III) diventa

$$n\sum_{1}^{n}{}_i(-1)^i\binom{n-1}{i-1},$$

il cui valore è zero perchè la sommatoria rappresenta la proprietà in questione nel caso $\alpha=0$.

Supponiamo ora la proprietà vera fino al valore $\alpha=h$, e dimostriamo ch'essa è vera anche per $\alpha=h+1$. Infatti, come nel caso trattato di $\alpha=1$,

$$\binom{n}{i}i^{h+1}=n\binom{n-1}{i-1}i^h,$$

ed essendo inoltre

$$i^h=(i-1)^h+\binom{h}{1}(i-1)^{h-1}+\dots+\binom{h}{h-1}(i-1)+1,$$

si ha

$$\sum_{1}^{n}{}_i(-1)^i\binom{n}{i}i^{h+1}=$$

$$=n\sum_{1}^{n}{}_i(-1)^i\binom{n-1}{i-1}\left[(i-1)^h+\binom{h}{1}(i-1)^{h-1}+\dots+\binom{h}{h-1}(i-1)+1\right]=$$

$$=n\left\{\sum_{1}^{n}{}_i(-1)^i\binom{n-1}{i-1}(i-1)^h+\binom{h}{1}\sum_{1}^{n}{}_i(-1)^i\binom{n-1}{i-1}(i-1)^{h-1}+\dots+\right.$$

$$\left.+\binom{h}{h-1}\sum_{1}^{n}{}_i(-1)^i\binom{n-1}{i-1}(i-1)+\sum_{1}^{n}{}_i(-1)^i\binom{n-1}{i-1}\right\}$$

e siccome le sommatorie corrispondono rispettivamente ai casi $\alpha = h$, $h - 1, \ldots, 1, 0$ per i quali la proprietà s'è supposta vera, l'espressione precedente è nulla. Per il principio dell'induzione completa la proprietà resta dimostrata in generale.