
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

BEPPPO LEVI

**Sulla natura analitica di una classe
di funzioni definite da serie di
potenze convergenti sulla
circonferenza di convergenza**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **12** (1933), n.1, p. 1-5.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_1_1_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_1_1_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_1_1_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1933.

PICCOLE NOTE

Sulla natura analitica di una classe di funzioni definite da serie di potenze convergenti sulla circonferenza di convergenza.

Nota di B. LEVI (a Bologna).

Sunto. - *Mediante l'analisi della diramazione della funzione di cui un ramo è espresso dalla serie $\sum \frac{x^n}{n^k + h}$, si mostra che detta funzione non è razionalmente esprimibile mediante le trascendenti elementari.*

Nel « Bollettino dell' U. M. I. », 15 dicembre 1932, pag. 303, è stato proposto di dimostrare elementarmente che la funzione analitica rappresentata, nel cerchio di raggio 1, dalla serie

$$\sum_n \frac{x^n}{n^2 + 1}$$

non è funzione razionale di x e di trascendenti elementari.

Il problema si inquadra bene in quello più generale di precisare la natura analitica delle funzioni rappresentate, nel cerchio di raggio 1, da

$$f(x; k, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k + h} \quad (k \geq 2 \text{ intero, } h \text{ qualunque}).$$

Da quanto si dirà si vede pure che si potrebbe anche generalizzare ulteriormente ponendo, per es., per denominatore una più generale funzione razionale intera di n , ma senza vantaggi essenziali.

1. Si ha immediatamente

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dx} f &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^k + h} x^n, \\ x \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} f &= x^2 \frac{d^2}{dx^2} f + x \frac{d}{dx} f = \sum \frac{n^2}{n^k + h} x^n, \\ &\dots \dots \dots \\ x^k \frac{d^k}{dx^k} f + \frac{k(k-1)}{2} x^{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} f + \dots + x \frac{d}{dx} f &= \sum \frac{n^k}{n^k + h} x^n. \end{aligned}$$

I coefficienti del primo membro dell'ultima relazione sono numeri interi che si calcolano facilmente in modo ricorrente, ma che qui non interessano: indicandoli con

$$a_{k1} = \frac{k(k-1)}{2}, \quad a_{k2}, \dots, \quad a_{k, k-1} = 1,$$

quest'ultima relazione può scriversi

$$x^k f^{(k)} + a_{k1} x^{k-1} f^{(k-1)} + \dots + a_{k, k-1} x f' = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - h f,$$

ossia

$$x^k f^{(k)} + a_{k1} x^{k-1} f^{(k-1)} + \dots + a_{k, k-1} x f' + h f = \frac{x}{1-x},$$

onde si vede che le funzioni considerate soddisfano ad una classe di equazioni differenziali lineari di tipo assai semplice ⁽¹⁾.

Vogliamo però studiare le funzioni in questione partendo direttamente dalle serie che le definiscono.

2. Conviene incominciare dal caso $h = 0$. Poniamo

$$f(x; k, 0) = \varphi_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k}, \quad (k \geq 2 \text{ intero}).$$

Si ha

$$x \varphi_k'(x) = \varphi_{k-1}(x), \quad \text{per } k \geq 3$$

$$x \varphi_2'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x).$$

Quindi

$$\varphi_k(x) = \int_0^x \frac{\varphi_{k-1}(x)}{x} dx, \quad \text{per } k \geq 3$$

$$\varphi_2(x) = -\int_0^x \frac{\log(1-x)}{x} dx.$$

Le espressioni dei secondi membri definiscono le funzioni φ_k non soltanto entro il cerchio di convergenza delle serie che hanno

(1) La riducibilità delle equazioni di questo tipo (con secondo membro funzione qualunque della x) alle quadrature è nota. V. p. es. FRENET, *Recueil d'exercices etc.* (5^e ed., 1891, pagg. 267 e 343-44) oppure DIENGER, *Die Differential-und Integralrechnung*, Bd. 2, (3^a ed., 1868), pagg. 100 e 128.

servito alla prima definizione, ma *in tutto il campo di esistenza*, il quale si estende a tutto il piano: si vede da esse che φ_k non ha punti singolari altrove che per

$$x=0, \quad 1, \quad \infty.$$

In particolare quindi sulla circonferenza di raggio 1, di convergenza della serie $\sum \frac{x^n}{n^k}$, questa ha il solo punto singolare $x=1$.

3. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= -\log x \log(1-x) - \int_0^x \frac{\log x}{1-x} dx, \\ \varphi_k(x) &= \log x \varphi_{k-1}(x) - \int_0^x \log x \cdot \varphi'_{k-1}(x) dx = \\ &= \log x \varphi_{k-1}(x) - \int_0^x \frac{\log x \cdot \varphi_{k-1}(x)}{x} dx \quad (k \geq 3); \end{aligned}$$

nell'ultimo $\int$, per $k=3$ si deve intendere $\varphi_1(x) = -\log(1-x)$. Facendo, nella seconda uguaglianza, $k=3$ e sostituendo a φ_2 e φ_1 i loro valori, quindi integrando ancora per parti, si ottiene

$$\begin{aligned}\varphi_3(x) &= -\log^2 x \log(1-x) - \log x \int_0^x \frac{\log x}{1-x} dx + \int_0^x \frac{\log x \log(1-x)}{x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \log^2 x \log(1-x) + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\log^2 x}{1-x} dx - \log x \int_0^x \frac{\log x}{1-x} dx. \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene una espressione per $\varphi_4(x)$ e così di seguito. Si ottiene l'espressione generale di $\varphi_k(x)$ per induzione completa; essa è della forma

$$\varphi_k(x) = -\frac{1}{(k-1)!} \log^{k-1} x \log(1-x) + \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} \log^{k-i-1} x \int_0^x \frac{\log^i x}{1-x} dx,$$

dove i coefficienti a_{ki} si determinano agevolmente per ricorrenza, ma a noi non interessano. Se invero si suppone che la formola sia già dimostrata per i valori $k-1$ e $k-2$ dell'indice k , si ha,

sostituendo nella formola generale precedente,

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) = & -\frac{1}{(k-2)!} \log^{k-1} x \log(1-x) + \sum_{i=1}^{k-2} a_{k-i} \log^{k-i-1} x \int_0^x \frac{\log^i x}{1-x} dx \\ & + \frac{1}{(k-3)!} \int_0^x \frac{\log^{k-2} x}{x} \log(1-x) dx - \sum_{i=1}^{k-3} a_{k-i} \int_0^x \frac{\log^{k-i-2} x}{x} dx \int_0^x \frac{\log^i x}{1-x} dx \\ = & \left[-\frac{1}{(k-2)!} + \frac{1}{(k-3)!(k-1)} \right] \log^{k-1} x \log(1-x) + \\ & + \sum_{i=1}^{k-3} \left(a_{k-i} - \frac{a_{k-i-1}}{k-i-1} \right) \log^{k-i-1} x \int_0^x \frac{\log^i x}{1-x} dx \\ & + a_{k-1-k-2} \log x \int_0^x \frac{\log^{k-2} x}{1-x} dx \\ & + \left(\frac{1}{(k-3)!(k-1)} - \sum_{i=1}^{k-3} \frac{a_{k-i}}{k-i-1} \right) \int_0^x \frac{\log^{k-1} x}{1-x} dx, \end{aligned}$$

espressione che ha precisamente la forma enunciata.

Se, in base a questa espressione di $\varphi_k(x)$, noi cerchiamo l'effetto di una circolazione attorno al punto $x=1$, vediamo ⁽¹⁾ che, se il circuito è abbastanza stretto da non comprendere il punto $x=0$, i termini nella Σ danno luogo ad un incremento nullo, mentre il primo termine dà luogo all'incremento

$$-\frac{2\pi i}{(k-1)!} \log^{k-1} x_0,$$

(x_0 essendo il punto in cui si chiude il circuito).

La superficie di RIEMANN della funzione $\varphi_k(x)$ ha quindi infiniti fogli: su uno di questi fogli, $\varphi_k(0)=0$ (e $\varphi_k(x)$ non dirama); invece sugli altri fogli $\varphi_k(0)=\infty$ (e si potrebbe mostrare che $\varphi_k(x)$ vi dirama). Queste proprietà non possono appartenere ad una funzione razionale di x , e delle trascendenti elementari.

4. Consideriamo ora la più generale funzione $f(x; k, h)$.

Essendo

$$\frac{1}{n^k + h} = \frac{1}{n^k} \left(1 - \frac{h}{n^k} + \frac{h^2}{n^{2k}} - \frac{h^3}{n^{3k}} + \dots \right)$$

⁽¹⁾ Per es. effettuando le integrazioni per serie dopo aver assunto come variabile d'integrazione $z=1-x$.

si può scrivere

$$f(x; k, h) = \varphi_k(x) - h\varphi_{2k}(x) + h^2\varphi_{3k}(x) - \dots$$

Non occorrono preoccupazioni intorno alla convergenza perchè, per assicurarla, basta sopprimere eventualmente in tutte le funzioni considerate i termini corrispondenti ai primi valori di n , e cioè alterarle per una funzione razionale (intera).

Una circolazione intorno al punto 1 dà quindi ad $f(x; k, h)$ l'incremento

$$-2\pi i \log^{k-1} x_0 \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(2k-1)!} h \log^k x_0 + \frac{1}{(3k-1)!} (h \log^k x_0)^2 - \dots \right).$$

La serie in parentesi è una funzione intera di

$$h \log^k x_0 = \log^k x_0 \sqrt[k]{h}.$$

L'ipotesi $k > 1$ esclude che tale funzione possa essere $e^{-\log x_0 h} = \frac{1}{x_0^h}$: si tratta dunque di una trascendente non elementare rispetto alla variabile x_0 . (Nel caso più semplice di $k=2$ si tratta della funzione

$$\frac{\operatorname{sen} \log^2 x_0 \sqrt[h]{h}}{\log^2 x_0 \sqrt[h]{h}}).$$

Basta ciò per escludere che $f(x; k, h)$ sia esprimibile razionalmente mediante la variabile x e le trascendenti elementari.

D'altronde possono ripetersi per la funzione $f(x; k, h)$ osservazioni, intorno alla conformazione della corrispondente superficie di RIEMANN, analoghe a quelle del n.º prec. per la funzione $\varphi_k(x)$.