Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Ludovico Geymonat

Ancora sul Teorema di Picard per le funzioni analitiche e sue generalizzazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.1, p. 18–21.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_1_18_0>

Ancora sul Teorema di Picard per le funzioni analitiche e sue generalizzazioni.

Nota di LUDOVICO GEYMONAT (a Torino).

Sunto. - *Si risponde ad una obiezione del prof.* G. VIVANTI *circa alcuni corollari del Teorema di Picard, e se ne generalizza uno riguardante la funzione somma di due trascendenti intere ciascuna delle quali evita un valore finito. Si danno in seguito alcune generalizzazioni del Teorema di Landau e del Teorema di Schottky sulle funzioni analitiche.*

1. Il prof. G. VIVANTI, interessandosi gentilmente di una mia Nota, *Un' osservazione sul Teorema di Picard per le funzioni analitiche* (²), ha osservato (³) che, affinchè la (1) di tale mia Nota non sia una funzione razionale, bisogna aggiungere alle condizioni da me enunciate la seguente: che essa (1) non tenda ad 1 quando x tende ad infinito, e cioè $z(x):y(x)$, se è una funzione razionale, non tenda a zero quando x tende ad infinito.

Mentre ringrazio vivamente il prof. VIVANTI della sua esattissima osservazione, noto che la nuova condizione trovasi verificata

(²) « Bollettino dell' Unione Matematica Italiana », 1932, pag. 160.
(³) « Bollettino dell' Unione Matematica Italiana », 1932, pag. 200.

in tutti gli esempî da me in quella Nota citati, onde non deve venir corretto l'enunciato di nessuno di essi [1].

Colgo l'occasione per osservare che la *c)* del § 1 della mia Nota può venire, con ragionamenlo analogo a quello seguito in tale Nota, generalizzata nel modo seguente: « Date due funzioni intere $y(x)$ e $z(x)$, delle quali l'una non è combinazione lineare dell'altra; se, per x finito, la $y(x)$ evita il valore α, la $z(x)$ il valore β, essendo α e β due numeri finiti, *eguali o diversi fra loro,* allora la funzione $y(x)+kz(x)$, ove k è una costante diversa da zero, prende in infiniti punti del piano x il valore $\alpha+k\beta$ ».

Quando si conoscano due funzioni soddisfacenti alle condizioni ora enunciate con $\alpha \neq \beta$, la nostra proposizione ci permette di fabbricare, dato un valore λ finito arbitrario, una funzione trascendente intera, della quale, pur non sapendosi se evita qualche valore, si sa che certamente assume, per infiniti valori finiti di x, il valore λ.

2. Sempre nello stesso ordine di idee possiamo dimostrare quanto segue:

« *Data una funzione intera*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots,$$

e data una trascendente intera che evita il valore zero:

$$z(x) = b_0 + b_1 x + \dots;$$

allora, se la $\mathrm{f(x)}$ *non è combinazione lineare della* $\mathrm{z(x)}$, *dato un valore finito arbitrario* k, *purchè sia* $\mathrm{b_1 k \neq a_0 b_1 - a_1 b_0}$, *sarà possibile trovare in funzione soltanto di* $\mathrm{a_0}$, $\mathrm{a_1}$, $\mathrm{b_0}$, $\mathrm{b_1}$, *il minimo numero* R *con la seguente proprietà: in ogni cerchio* $|\mathrm{x}| \leq \mathrm{R}+\varepsilon$, *con* ε *positivo arbitrario, o la* $\mathrm{f(x)}$ *o la* $\mathrm{f(x)+z(x)}$ *prende il valore* k ».

Supponiamo che nel cerchio $|x| < r$ nè la $f(x)$ nè la $f(z)+z(x)$ prendano il valore k; allora in esso la funzione $G(x) = \dfrac{f(x)-k}{f(x)+z(x)-k}$ sarà sviluppabile in serie di Taylor:

$$G(x) = A_0 + A_1 x + \dots.$$

[1] In essi infatti il rapporto $z(x):y(x)$ non può essere una funzione razionale; per i casi *a)* del § 1 e α) del § 2 la cosa è evidente essendo $z(x)$ trascendente ed $y(x)$ funzione razionale; per gli altri casi basta osservare che: supposto $z(x) = f(x)y(x)$ con $f(x)$ funzione razionale che prende il valore zero per $x = \infty$, allora tale $f(x)$ dovrebbe prendere il valore ∞ per qualche valore finito di x, e ne nascerebbe un assurdo, essendo, in tali casi, sia la $z(x)$ che la $y(x)$ trascendenti intere che evitano entrambe il valore zero per ogni x finito.

Essa non è una costante, perchè $f(x)$ non è una combinazione lineare di $z(x)$; inoltre essa evita nel cerchio $|x| \leq r$ i valori zero, uno ed infinito. Dunque potremo applicare ad essa il Teorema di LANDAU, e, se A_1 è $\neq 0$, trovare in funzione di A_0 ed A_1 il numero R limite superiore degli r. Ma, come si constata immediatamente, è:

$$A_0 = \frac{a_0 - k}{a_0 + b_0 - k}, \quad A_1 = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1 + b_1 k}{(a_0 + b_0 - k)^2}.$$

Dunque, nell'ipotesi del teorema, è $A_1 \neq 0$. Si vede subito che R è proprio il minimo numero con le proprietà richieste, ed è funzione soltanto di a_0, a_1, b_0, b_1.

L'interesse di questa generalizzazione rispetto al Teorema di LANDAU consiste in ciò che: mentre nel Teorema di LANDAU dati *due* valori ed *una* funzione si trova un cerchio con la nota proprietà; qui si dà *un solo* valore e si costruisce, mediante la $z(x)$, una *seconda* funzione tale che, o questa, o quella assegnata dovranno nel cerchio $|x| \leq R + \varepsilon$ assumere il valore prefissato.

3. Si può pure, facilmente, dimostrare la seguente generalizzazione del Teorema di SCHOTTKY:

« *Data una funzione* f(x), *regolare nel cerchio* $|x| < R$, *dove può venir sviluppata nella serie:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots,$$

e data una trascendente intera, che evita il valore zero

$$z(x) = b_0 + b_1 x + \dots;$$

se la f(x) *non è combinazione lineare di* z(x), *e se tanto la* f(x) *quanto la* f(x) + z(x) *evitano nel cerchio* $|x| < R$ *un valore finito* **k**, *non sottoposto ad alcuna condizione; allora preso un* θ *arbitrario, purchè* $0 < \theta < 1$, *esiste un numero* M, *dipendente solo da* a_0, b_0, θ, R, k, *tale che si ha*

$$(1) \qquad |f(x)| \leq M(a_0, b_0, \theta, R, k)$$

$$(2) \qquad |f(x) + z(x)| \leq M(a_0, b_0, \theta, R, k)$$

nel cerchio $|x| \leq \theta R$ ».

Ricordiamo che nel Teorema di SCHOTTHY si imponeva alla $f(x)$ di essere regolare nel cerchio $|x| < R$, ed in più di evitare in esso non uno, ma due valori finiti k_1 e k_2, diversi fra loro; mentre nel nostro caso si impone alla $f(x)$ di evitare un solo valore finito nel cerchio $|x| < R$, aggiungendo però una condizione per la $f(x) + z(x)$. Si può tuttavia osservare che nel Teorema di SCHOTTKY si giungeva solo ad una diseguaglianza analoga alla (1), qui si giunge contemporaneamente alla (1) ed alla (2).

L'artifizio della dimostrazione consiste nel costruire contemporaneamente due funzioni, ciascuna delle quali, nelle condizioni imposte dall'enunciato, sia regolare ed eviti due valori finiti nel cerchio $|x| < R$. Esse sono:

$$F_1(x) = \frac{f(x) - k}{z(x)} = A_0' + A_1'x + \dots;$$

$$F_2(x) = \frac{f(x) + z(x) - k}{z(x)} = A_0'' + A_1''x + \dots$$

delle quali, la prima nel cerchio $|x| < R$ è regolare ed evita i valori 0, e -1; la seconda, in tale cerchio, è regolare ed evita i valori 0, e $+1$.

Applicando il Teorema di SCHOTTKY all'una ed all'altra, avremo che, nel cerchio $|x| \leq \theta R$, è:

$$|F_1(x)| \leq M_1(A_0', \theta, R, 0, -1);$$

$$|F_2(x)| \leq M_2(A_0'', \theta, R, 0, +1)$$

ove è

$$A_0' = \frac{a_0 - k}{b_0}; \quad A_0'' = \frac{a_0 + b_0 - k}{b_0}.$$

Ora, detto E il massimo valore assoluto di $|z(x)|$ nel cerchio $|x| < R$, possiamo concludere che nel cerchio $|x| \leq \theta R$, è:

$$\frac{|f(x) - k|}{E} \leq \left| \frac{f(x) - k}{z(x)} \right| < M_1$$

donde $|f(x) - k| < M_1 \cdot E$, e ricordando che è $|f(x) - k| \geq |f(x)| - |k|$.

$$|f(x)| \leq M_1 \cdot E + |k|. \tag{3}$$

In modo analogo si trova:

$$|f(x) + z(x)| \leq M_2 \cdot E + |k|. \tag{4}$$

Supponiamo ora che sia M_1 il maggiore fra M_1 ed M_2; tenendo conto dell'espressione di A_0', si deduce che il numero M di cui parla il teorema è:

$$M = M_1(a_0, b_0, k, \theta, R) + |k|$$

ed esso dipende proprio soltanto da a_0, b_0, k, θ, R. Ovviamente si giungerebbe ad analogo risultato se fosse M_2 il maggiore fra M_1 ed M_2.