MARIO VILLA

# Sopra una classe di superficie razionali rigate dello spazio a cinque dimensioni

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **12** (1933), n.1, p. 15–18.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_1_15_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1933.

# Sopra una classe di superficie razionali rigate dello spazio a cinque dimensioni.

Nota di MARIO VILLA (a Pavia).

**Sunto.** - *L'Autore perviene a superficie razionali rigate di* $S_5$ *che possiedono un sistema* $\infty^1$ *di curve che sono ad un tempo quasi-asintotiche* $\gamma_{1,3}$ *e curve di* TERRACINI.

**1.** In un lavoro recente: *Sulla riducibilità di alcune particolari corrispondenze algebriche* (« Rend. del Circolo Matematico di Palermo », T. LVI, 1932, pp. 142, 143), il TERRACINI osservò che le curve razionali di $S_5$ di equazioni parametriche

$$\frac{x_1}{x_0}=t^{k_1},\quad \frac{x_2}{x_0}=t^{k_2},\quad \frac{x_3}{x_0}=t^{k_3},\quad \frac{x_4}{x_0}=t^{k_4},\quad \frac{x_5}{x_0}=t^{k_5},$$

nell'ipotesi

$$k_1+k_2=k_3+k_4+k_5,\quad k_1k_2=k_3k_4+k_4k_5+k_5k_3, \tag{1}$$

$$k_1\equiv k_2\equiv 0,\quad k_3\equiv k_4\equiv k_5 \not\equiv 0 \pmod{3}, \tag{2}$$

godono della proprietà che ciascun loro $S_3$ osculatore è ulteriormente appoggiato alla curva in due punti [1] [2].

Da quanto dirò più sotto apparirà che le condizioni (1) si incontrano anche quando si impone ad una superficie rigata di $S_5$ di equazioni parametriche

$$\frac{x_1}{x_0}=t^{k_1},\quad \frac{x_2}{x_0}=t^{k_2},\quad \frac{x_3}{x_0}=\rho t^{k_3},\quad \frac{x_4}{x_0}=\rho t^{k_4},\quad \frac{x_5}{x_0}=\rho t^{k_5} \tag{3}$$

[1] Le condizioni (1), (2) — che equivalgono manifestamente a quelle di TERRACINI (op. cit., pp. 131, 142) — hanno interesse anche perchè si presentano nello studio di certe curve di $S_4$ (TERRACINI, op. cit., pp. 123, 142).

[2] Per l'effettiva determinazione di numeri interi positivi soddisfacenti alle (1), (2), vedi TERRACINI (op. cit., p. 131 nota 16, e p. 142).

— i $k$ essendo qui costanti generiche (1) — che le $\infty^1$ curve direttrici $\rho =$ costante siano delle quasi-asintotiche $\gamma_{1,3}$ (2), tali cioè che ognuna — in un suo punto generico — abbia l'$S_3$ osculatore che contiene il piano ivi tangente alla superficie.

**2.** Supponiamo che tre generatrici consecutive della (3) siano indipendenti, che cioè l'indice di sviluppabilità della (3) non sia minore dell'ordinario, o ancora

$$(k_1 - k_2)(k_3 - k_4)(k_4 - k_5)(k_5 - k_3) \neq 0 \text{ (3)},$$

vale a dire

$$k_1 \neq k_2, \quad k_3 \neq k_4 \neq k_5 \neq k_3.$$

Cercare una quasi-asintotica $\gamma_{1,3}$ della (3) equivale a cercare una funzione $\varphi(t)$ tale che

$$(4) \qquad (k_3 + k_4 + k_5 - k_1 - k_2)\varphi + 3\varphi' t = 0,$$

$$(5) \qquad [(k_3{}^2 + k_4{}^2 + k_5{}^2 - k_1{}^2 - k_2{}^2) + (k_3 k_4 + k_4 k_5 + k_5 k_3 - k_1 k_2) - - 6(k_3 + k_4 + k_5 - k_1 - k_2)]\varphi + (k_3 + k_4 + k_5 - 3)4\varphi' t + 6\varphi'' t^2 = 0 \text{ (4)},$$

gli apici indicando derivazioni rispetto a $t$.

(1) Se ci si limita al campo algebrico, queste superficie si possono caratterizzare geometricamente nel modo che segue. (Per le nozioni che ora s'introdurranno: BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Messina, Principato, 1923, 2ª ed., pp. 362, 363).

In uno spazio $S_r$ consideriamo una rigata razionale normale $V_2{}^{r-1}$ di direttrice minima d'ordine $m$ $\left(r > 5;\ 1 < m \leq \frac{r-2}{2} \text{ o } \frac{r-1}{2};\ r, m \text{ del resto affatto generici}\right)$ e una piramide $\Delta$ rispetto alla quale la $V_2{}^{r-1}$ — presa $\Delta$ come piramide fondamentale in un sistema di coordinate proiettive omogenee — abbia equazioni canoniche, il che importa per $\Delta$ delle condizioni geometriche ben note. Gli $r+1$ $S_{r-1}$ di $\Delta$ si diranno fondamentali, e fondamentale si dirà pure ogni $S_{r-p}$ comune a $p$ di essi. Ciò posto, ricordiamo che la $V_2{}^{r-1}$ ha la direttrice $C^m$ appartenente ad un $S_m$ fondamentale, e la direttrice $C^{r-m-1}$ appartenente ad un $S_{r-m-1}$ fondamentale (opposto ad $S_m$). Ebbene: se prendiamo sei $S_{r-1}$ fondamentali di cui tre passanti per $S_m$, e gli altri tre per l'$S_{r-m-1}$, e se dall'$S_{r-6}$ comune ad essi proiettiamo la $V_2{}^{r-1}$ sull'$S_5$ fondamentale opposto, otteniamo in questo $S_5$ appunto la (3).

(2) BOMPIANI, *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi* « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », T. XXXVII. 1914, p. 305.

(3) Per queste nozioni: BOMPIANI, op. cit., pp. 308, 312.

(4) In generale, la ricerca di una quasi-asintotica $\gamma_{1,3}$ di una superficie $x_i = A_i + \rho B_i$ ($A_i$, $B_i$ essendo funzioni di $t$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) si riduce a

La (3) possiederà poi un sistema $\infty^1$ di $\gamma_{1,3}$ quando la (5) — come equazione differenziale in $\varphi$ — è una conseguenza della (4). All'uopo deriviamo la (4) ed eliminiamo $\varphi''$ fra l'equazione ottenuta e la (5). Si ottiene

$$(6)\qquad [(k_3^2+k_4^2+k_5^2-k_1^2-k_2^2)+(k_3k_4+k_4k_5+k_5k_3-k_1k_2)-\\ -6(k_3+k_4+k_5-k_1-k_2)]\varphi+(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5-9)2\varphi't=0.$$

Si tratta dunque di imporre che la (6) coincida con la (4), il che importa

$$(7)\qquad k_1^2+k_2^2-k_3^2-k_4^2-k_5^2=k_1k_2-k_3k_4-k_4k_5-k_5k_3.$$

Questa è condizione necessaria e sufficiente affinchè la (3) possegga un sistema $\infty^1$ di quasi-asintotiche $\gamma_{1,3}$.

Mettiamoci ora nell'ipotesi che la (7) sussista. Le $\gamma_{1,3}$ della (3) si ottengono allora integrando la (4), il che dà

$$\varphi=\alpha t^{\frac{k_1+k_2-k_3-k_4-k_5}{3}},$$

essendo $\alpha$ una costante.

Se vogliamo che queste $\gamma_{1,3}$ siano le $\rho=\varphi=$ costante, dovrà perciò essere

$$k_1+k_2=k_3+k_4+k_5,$$

e inoltre — dovendo valere la (7) —

$$k_1k_2=k_3k_4+k_4k_5+k_5k_3.$$

Si sono cioè ritrovate le (1).

3. Scende subito da ciò una notevole proprietà della curva di Terracini (n. 1). Ricordiamo che l'$S_3$ osculatore a tale curva nel punto $P(t)$ si appoggia ulteriormente a questa nei due punti $P_1(\omega t)$, $P_2(\omega^2 t)$ ($\omega^3=1$). Ora: i tre punti $P$, $P_1$, $P_2$ appartengono ad una stessa retta $\nu$ [1], e il luogo delle trisecanti $\nu$ della curva è la superficie (3) i cui $k$ sono interi positivi soddisfacenti alle (1), (2). Si conclude che *le trisecanti* $\nu$ *di una curva di* Terracini *sono le*

quella di una funzione $\varphi(t)$ tale che

$$|A_i,\ B_i,\ A_i',\ B_i',\ A_i''+\varphi B_i'',\ A_i'''+\varphi B_i'''+3\varphi' B_i''|=0,$$
$$\left|A_i,\ B_i,\ A_i',\ B_i',\ A_i''+\varphi B_i'',\ A_i^{\mathrm{IV}}+\varphi B_i^{\mathrm{IV}}+4\varphi' B_i'''+6\varphi'' B_i''\right|=0.$$

[1] Per di più gli $S_4$ osculatori alla curva in $P$, $P_1$, $P_2$ passano per uno stesso $S_3$. Le proprietà della curva duale coincidono quindi con quelle della curva iniziale. Ne viene anche — ad esempio — che l'$S_4$ osculatore in uno dei tre punti $P$ contiene gli $S_1$ osculatori nei rimanenti due punti (Terracini, op. cit., p. 143).

*generatrici di una superficie razionale che possiede un sistema* $\infty^1$ *di curve — fra cui la curva iniziale — che sono ad un tempo quasi-asintotiche* $\gamma_{1,3}$ *e curve di* TERRACINI. Ed è da notare che *la rigata è generata dalle trisecanti* $\nu$ *di una qualsiasi delle sue* $\infty^1$ *curve di* TERRACINI.

Aggiungerò che *esistono due omografie che oltre a trasformare in sè stessa la superficie, trasformano in sè stessa ogni sua quasi-asintotica* $\gamma_{1,3}$ [1].

Dirò infine che tenendo conto della nota 3 del n. 1, del n. 2, e dell'ultima proprietà enunciata, si può caratterizzare geometricamente la nostra superficie, e quindi anche le curve di TERRACINI come quasi-asintotiche $\gamma_{1,3}$ di essa.

[1] Le $\infty^1$ omografie

$$x_0' = x_0, \quad x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = \rho x_3, \quad x_4' = \rho x_4, \quad x_5' = \rho x_5$$

trasformano la superficie in sè stessa, e ogni sua $\gamma_{1,3}$ in un'altra $\gamma_{1,3}$. Le due omografie di cui sopra sono — fra queste — quelle unimodulari, cioè quelle relative ai valori $\omega$, $\omega^2$ di $\rho (\omega^3 = 1)$.