Armando Chiellini

Sopra l'integrazione di particolari equazioni differenziali del secondo ordine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **12** (1933), n.1, p. 12–15.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1933_1_12_1_12_0>

Sopra l'integrazione di particolari equazioni differenziali del secondo ordine.

Nota di ARMANDO CHIELLINI (a Cagliari).

Sunto. - *L'Autore determina alcuni casi in cui l'integrazione di particolari equazioni differenziali del secondo ordine può esser ricondotta a quella di equazioni del primo ordine (ed in alcuni casi alle quadrature), estendendo un risultato del prof.* PASCAL *relativo all'equazione* $y'' + Py' + Qy'^2 = 0$.

1. Il prof. PASCAL [1] esamina l'equazione differenziale

$$y'' + Py' + Qy'^2 = 0, \tag{a}$$

con P e Q funzioni di x e di y e determina, oltre i due casi ovvii in cui P e Q sono funzioni della sola x o della sola y, un terzo caso assai interessante in cui l'integrazione della (a) può esser ricondotta a quella di una del primo ordine: quello in cui è $P = P(x)$, $Q = Q(y)$. Inoltre Egli mostra come al tipo (a) possa ricondursi l'equazione

$$x^3y'' + (xy' - y)^2 = 0. \tag{b}$$

In questo lavoretto estenderò il risultato stabilito dal prof. PASCAL per le equazioni del tipo (a) e dopo determinerò due intere classi di equazioni (comprendenti la (b)), per cui ha luogo una proprietà analoga.

[1] Vedi PASCAL, *Esercizii critici di Calcolo differenziale e integrale.*

2. A questo scopo consideriamo l'equazione differenziale del secondo ordine

$$y'' + P(x)y'^p + Q(y)y'^{p+1} = 0,$$

e dividiamola per y'^p; avremo

$$\frac{y''}{y'^p} + P(x) + Q(y)y' = 0,$$

cioè

$$\frac{dy'}{y'^p} + P(x)dx + Q(y)dy = 0,$$

ed integrando, supposto $p \neq 1$ per non ricadere nel caso del Pascal,

$$\frac{y'^{1-p}}{1-p} + P_1(x) + Q_1(y) = h, \qquad (h \text{ cost})$$

dove si è posto, per brevità

$$P_1(x) = \int P(x)d(x), \quad Q_1(y) = \int Q(y)dy.$$

Ne segue il risultato: *L'equazione*

(1) $$y'' + P(x)x'^p + Q(y)y'^{p+1} = 0,$$

è sempre riducibile ad una del primo ordine.

3. Identico procedimento per abbassare l'ordine dell'equazione si può applicare al tipo più generale

$$y'' + P(x)R(y') + Q(y)R(y')y' = 0,$$

dove $R(y')$ è una qualunque funzione della sola variabile y'.

Più generalmente, si può osservare che ogni volta che, mediante un'opportuna operazione algebrica (il più semplicemente mediante moltiplicazione per un conveniente fattore) un'equazione differenziale può porsi sotto la forma

$$A(x)dx + B(y)dy + \Sigma_i B_i(y^i)dy^i = 0,$$

dove gli indici indicano ordine di derivazione, se ne ricava subito l'integrale primo

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy + \Sigma_i \int B_i(y^i)dy^i = h, \qquad (h \text{ cost.}).$$

4. Consideriamo, generalizzando l'equazione (b), la

(2) $$y'' + f(xy)\left(y' - \frac{y}{x}\right)^p = 0,$$

e determiniamo due casi abbastanza generali, nei quali anche l'equazione (2) si riduce ad una del primo ordine, od, in particolare, a quadrature. A questo scopo eseguiamo la sostituzione [1]

$$\text{(c)} \qquad x = e^{\theta}, \quad y = z \cdot e^{\theta},$$

con cui sarà

$$y' = z'(\theta) + z(\theta), \quad y'' = \frac{z''(\theta) + z'(\theta)}{e^{\theta}},$$

e sostituiamo nella (2); avremo [2]:

$$\text{(3)} \qquad z''(\theta) + z'(\theta) + e^{\theta} F(\theta, z) z'^{p}(\theta) = 0,$$

dove $F(\theta, z) = f(e^{\theta}, ze^{\theta})$; ne segue intanto che la (2) può sempre ridursi, mediante le (c) al tipo (3).

Dall'esame della (3) deduciamo poi:

Se nella (2) *la funzione* f(x,y) *è una funzione della sola* x, *l'equazione stessa si può senz'altro riportare alle quadrature;* infatti in tal caso ponendo

$$z'(\theta) = f(\theta),$$

si giunge ad un'equazione di BERNOUILLI.

Se nella (2) *la funzione* f(x,y) *è funzione omogenea di grado* —1 *in* x *e* y, *l'equazione stessa si riporta ad una del primo ordine.* Infatti, sotto tale ipotesi, a causa delle posizioni (c), risulta

$$f(xy) = \frac{1}{x} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = e^{-\theta} \varphi(z),$$

e quindi la (3) diviene

$$z'' + \varphi(z) z'^{p} + z' = 0,$$

che si riduce al primo ordine, non contenendo esplicitamente la variabile indipendente θ.

5. ESEMPIO. — Sia l'equazione

$$y'' + \frac{x+y}{y^2}\left(y' - \frac{y}{x}\right)^3 = 0,$$

avremo

$$z'' + z' + \frac{1+z}{z^2} z'^3 = 0,$$

(1) Suggerita dal prof. PASCAL per l'equazione (b).

(2) Si potrebbe più in generale pensare di considerare l'equazione $y'' + (Py' + Q)^p = 0$, ma eseguendo sopra di essa la sostituzione (c), si vede facilmente che l'unico caso in cui si perviene ad un risultato è quello in cui è $\frac{P}{Q} = -\frac{x}{y}$, che dà luogo all'equazione (2) del testo.

da cui $\theta''(z) = \theta'^2(z) + \frac{1+z}{z^2}$ ed infine

$$t'(z) = t^2(z) + \frac{1+z}{z^2},$$

che è un'equazione di RICCATI.