BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

TULLIO VIOLA

Una proprietà degli aggregati perfetti di punti, utile nello studio delle famiglie non normali di funzioni olomorfe

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.5, p. 287–290.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_5_287_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1932.

Una proprietà degli aggregati perfetti di punti, utile nello studio delle famiglie non normali di funzioni olomorfe.

Nota di T. Viola (a Parigi).

Sunto. - *Procedimento per costruire certi aggregati perfetti, continui e non densi, soddisfacenti a determinate proprietà particolarmente interessanti per le famiglie non normali di funzioni olomorfe.*

1. In una comunicazione tenuta al *Congresso internazionale di Zurigo* (settembre 1932) ho dimostrato che, *se* V *è una famiglia non normale di funzioni olomorfe in un dominio* (D), *limitata in ciascun punto di* (D), *e se* P *è un qualunque punto irregolare di* V, *esistono un aggregato perfetto* U = U(P), *contenente* P, *e una successione* Σ *di funzioni di* V, *tali che* Σ *è eccezionale in tutti i punti di* U [1].

È noto che, nelle ipotesi fatte, l'aggregato T dei punti irregolari di V è *perfetto, non denso, continuo e connesso* (« *zusammenhängend* ») con la frontiera di (D) [2]. Ci converrà assumere la definizione di continuità di un aggregato T nella forma data dal Cantor: un aggregato T si dice *continuo* se per ogni coppia di punti t, t' di esso, assegnato un numero $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, si può sempre trovare un numero *finito* di punti $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ di T, in modo che le distanze $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \overline{t_2t_3}, \ldots, \overline{t_\nu t'}$ siano tutte $< \varepsilon$ [3]. Se T' è un altro aggregato continuo, si dice che T è « connesso » con T', se l'aggregato $T + T'$ è ancora continuo.

Nella suddetta comunicazione ho affermato, senza dimostrazione, che si può fare in modo che *l'aggregato U* (naturalmente contenuto in T) *sia anch'esso perfetto, non denso, continuo e connesso con la frontiera di* (D). Il ragionamento col quale si dimostra questa proposizione non riguarda particolarmente le famiglie non normali di funzioni olomorfe: esso appartiene piuttosto

[1] Una successione Σ di funzioni olomorfe appartenenti a una famiglia non normale si dice *eccezionale* in un punto Q, se nessuna successione parziale di Σ converge uniformemente in nessun intorno di Q. Vedi A. Ostrowski, *Ueber Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes.* (« Math. Zeitschrift », Bd. 24, 1925, pagine 215-225); P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques.* (Gauthier-Villars, 1927, chap. I, n. 22, pag. 37).

[2] P. Montel, loc. cit., nota alla pag. 39.

[3] G. Cantor, *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.* (« Math. Ann. », Bd. 21, 1883, pagg. 575-576).

alla teoria generale degli aggregati di punti e può essere enunciato come segue:

È assegnato un aggregato di punti T, contenuto in un dominio limitato (D) del piano complesso, perfetto, non denso, continuo e connesso con la frontiera di (D); ed è assegnata una certa relazione $R(T)$ che ciascun punto di T può avere o non avere con T: la relazione $R(T)$ è tale che, se è verificata per tutti i punti di un aggregato (contenuto in T), essa è pure verificata per tutti i suoi punti limiti. È poi definita una legge per la quale ad ogni punto P di T si fa corrispondere un aggregato $T^*(P)$, contenuto in T e contenente P e tutti i punti di T in cui è verificata la relazione $R(T)$; in tutti questi punti è verificata la relazione $R(T^*)$; l'aggregato $T^*(P)$ gode delle stesse proprietà enunciate per T. In queste ipotesi *esiste un aggregato parziale* U(P) *di* T *che contiene un punto* P *di* T, *arbitrariamente assegnato, gode delle stesse proprietà sopra enunciate per* T *e tale che tutti i suoi punti verificano la relazione* R(U).

In verità la proposizione enunciata relativa alle famiglie non normali di funzioni olomorfe è il caso particolare di quella enunciata ora, quando si assuma come T l'aggregato dei punti irregolari di una famiglia V non normale nel dominio (D), come relazione $R(T)$ l'essere V eccezionale nel punto considerato P, come legge per la determinazione di $T^*(P)$ l'estrazione da V di una successione (famiglia) eccezionale in P e formazione dell'aggregato T^* dei suoi punti irregolari.

2. Per costruire $U(P)$ estraggiamo da T una successione di punti $\{P_n\}$ $(n=0, 1, 2, ...)$ con le regole seguenti:

1°) $P_0 = P$.

2°) Per ogni valore dell'indice n le regole definiscono, come si vedrà, un aggregato $T_n^*(P_{n-1})$ contenente i punti P_i per $i \leq n-1$ e rispetto al quale ciascuno di questi punti verifica la relazione $R(T_n^*)$; ciò ammesso, scelto, come si dirà, un nuovo punto P_n in T_n^*, si estrae da T_n^* un aggregato $T^*_{n+1}(P_n)$ secondo la legge supposta, in modo che, in P_n e nei precedenti punti P_i sia verificata la relazione $R(T^*_{n+1})$.

È allora manifesto, per induzione, che, prendendo $T_0^* = T$, si verifica la supposta determinazione di T_n^* per ogni valore di n.

3°) La scelta di P_n si farà nel modo seguente:

Indicando con t un intero naturale qualunque, chiamerò, per brevità, *cella d'ordine* t l'insieme dei punti $z = x + iy$ interni o sul contorno di uno dei quadrati $\frac{l}{2^t} \leq x \leq \frac{l+1}{2^t}$, $\frac{m}{2^t} \leq y \leq \frac{m+1}{2^t}$

(l, m interi positivi, negativi o nulli): il dominio (D), essendo limitato, sarà contenuto in un numero finito di celle d'ordine t; queste potranno supporsi numerate secondo una legge facile a determinarsi.

Supposti già fissati i punti $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$, esistono certamente valori di t tali che esistono celle d'ordine t contenenti punti di $T_n{}^*$ ma non contenenti nessuno dei punti suddetti: infatti, siano Q un punto di $T_n{}^*$ distinto dai punti suddetti e t un intero tale che $\frac{\sqrt{2}}{2^t}$ risulti minore della distanza di Q da ciascuno dei punti P_i: esisterà una cella d'ordine t contenente Q e nessuno dei punti P_i. Indichiamo con t_n il minimo valore di t pel quale esistono celle d'ordine t_n contenenti punti di $T_n{}^*$ ma non contenenti nessuno dei punti P_i; sarà $t_n \geq t_{n-1}$; ma il caso dell'$=$ non potrà presentarsi (per ogni valore della t) che un numero finito di volte, per la fatta osservazione che (D) è contenuto in un numero finito di celle d'ordine t.

Consideriamo la cella d'ordine t_n e di numero d'ordine più basso che contiene punti di $T_n{}^*$ ma nessuno dei nominati punti P_i: in essa assumiamo P_n secondo una regola determinata (e facile a precisarsi [1])). Per l'osservazione finale dell'alinea precedente, è $\lim_{n \to \infty} t_n = \infty$; ma per le proprietà di continuità degli aggregati T^*, sarà certamente $t_n = t_{n-1}$ finchè i punti P_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ si possano distribuire in due gruppi distanti per più di $2\frac{\sqrt{2}}{2^{t_{n-1}}}$ l'uno dall'altro, ovvero tutti i punti P_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ distino più di $2\frac{\sqrt{2}}{2^{t_{n-1}}}$ dal contorno di (D). Quando dunque è $t_n > t_{n-1}$, tutti i punti del gruppo $\{P_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ possono essere collegati fra loro e con un punto del contorno di (D) mediante una poligonale, i cui vertici sono punti del gruppo e i cui lati hanno lunghezza $\leq 2\frac{\sqrt{2}}{2^{t_{n-1}}}$.

Assumendo come $U(P)$ l'aggregato ottenuto chiudendo quello di tutti i punti P_n, si verifica la proposizione enunciata.

3. Osservazioni. — 1°) La stessa proposizione potrebbe dimostrarsi, con ragionamento analogo, in uno spazio a un numero qualunque di dimensioni.

[1]) Per es. si potrà prendere per P_n il punto di minore ascissa fra quelli di minore ordinata appartenenti a $T_n{}^*$ e alla detta cella.

2°) Dal punto di vista della teoria degli aggregati, l'ipotesi della limitazione di (D) è inutile, in quanto la proposizione resta vera per proiezione: tutt'al più può essere utile la convenzione dell'unicità del punto all'infinito.

3°) Il procedimento indicato fornisce un aggregato che, fra tutti quelli soddisfacenti all'enunciato, si potrebbe chiamare « *massimo* ». Ecco ciò che intendiamo dire. Riprendendo a considerare un gruppo di punti $\{P_i\}$ $(i = 0, 1, 2, ..., n-1)$, per il quale è $t_n > t_{n-1}$, si vede che se M è un punto qualunque di T_n^*, esiste un punto P_i del gruppo che dista da M per meno di $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{t_{n-1}}}$. Ciò basta a concludere che $U = \lim\limits_{n \to \infty} T_n^*$.

4°) U contiene tutti i punti di T che verificano la relazione $R(T)$.