Bollettino Unione Matematica Italiana

Letterio Laboccetta

Riduzione a tipi normali ed effettiva integrazione delle funzioni discontinue

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.5, p. 278–282.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_5_278_0>

Riduzione a tipi normali ed effettiva integrazione delle funzioni discontinue.

Nota di LETTERIO LABOCCETTA (a Roma).

Sunto. - *Eliminando i punti isolati si riducono le funzioni da integrare ad essere continue, o continue a destra; queste ultime si risolvono nella somma di una funzione continua, o di una combinazione lineare di funzioni continue esistenti in successivi intervalli, e di una costante discontinua. Delle forme fondamentali delle costanti discontinue si danno gli integrali.*

Considero qui delle funzioni univalenti e limitate, e che in uno o più punti, in numero finito o costituenti al più un insieme numerabile, dell'intervallo nel quale sono definite presentano delle discontinuità di una delle tre specie seguenti:

a) Tagli, punti cioè nei quali $f(c-0)=f(c+0)\neq f(c)$;

b) Salti semplici, punti cioè nei quali la funzione è continua solo a destra, $f(c-0)\neq f(c)=f(c+0)$, oppure è continua solo a sinistra, $f(c-0)=f(c)\neq f(c+0)$;

c) Salti con punti isolati, punti cioè nei quali la funzione è discontinua da ambo i lati, $f(c-0)\neq f(c+0)$ ed $f(c-0)\neq f(c)\neq f(c+0)$.

Presenta [1], per $x=0$, un taglio la funzione $y_1=\operatorname{sgn}^2 x$ che è $=0$ per $x=0$, e $=1$ per $x\neq 0$.

Presenta due salti semplici il primo per $x=-1$, nel quale è continua a sinistra, ed il secondo per $x=+1$, nel quale è continua a destra, la funzione

$$y_2=\operatorname{Dir}(x:0)=\operatorname{Dir} x \operatorname{sgn}^2(x^2-1)$$

che è $=1$ per $|x|<1$ ed $=0$ per $|x|\geq 1$.

Presenta, per $x=0$, un salto con un punto isolato la funzione $y_3=\operatorname{sgn} x$, che è $=0$ per $x=0$, $=+1$ per $x>0$, $=-1$ per $x<0$.

Alla effettiva integrazione di queste funzioni giungo mediante l'applicazione delle due proprietà ben note:

[1] Per i simboli delle funzioni qui adoperate e per la generazione geometrica di esse, vedasi una mia Comunicazione al Congresso dei Matematici di Bologna (1928), « Atti », vol. V, pp. 221-231, e tre mie Note nei « R. C. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XIII, Giugno 1931, p. 822 e p. 912; vol. XIV, Luglio 1931, p. 3.

I) Due funzioni generalmente uguali in un intervallo dato, salvo al più in corrispondenza dei punti di un insieme di misura nulla, hanno, in quell'intervallo, lo stesso integrale.

II) Una funzione discontinua, senza punti isolati, si può risolvere nella somma di una funzione continua, il « *nucleo* » di essa, e di una costante discontinua, la corrispondente « *funzione dei salti* ».

Della prima proprietà mi servo per sostituire ad una funzione discontinua data una funzione ad essa equivalente, agli effetti della integrazione, ma priva di punti isolati e dappertutto continua da uno dei lati, per es. a destra.

Basta a tale scopo aggiungere alla funzione data una funzione puntiforme opportunamente scelta. Si ottengono, ad esempio, in tal modo le tre funzioni

$$y_1' = \operatorname{sgn}^2 x + \operatorname{Punt} x \tag{1}$$

$$y_2' = \operatorname{Dir}(x; 0) + \operatorname{Punt}(x+1) \tag{2}$$

$$y_3' = \operatorname{sgn} x + \operatorname{Punt} x \tag{3}$$

che sono equivalenti alle tre funzioni y_1, y_2, y_3 innanzi indicate, ma sono tutte senza punti isolati e rese continue a destra; la prima anzi y_1' è continua assolutamente e si può integrare al modo ordinario. Ciò vale qualunque sia il numero dei tagli, purchè la funzione non presenti discontinuità di altra specie. Così, ad esempio, la funzione $y = x \operatorname{sgn} \operatorname{Fr} x^{-1}$, che presenta infiniti tagli a destra ed a sinistra dell'origine, nell'intervallo $-1 < x < +1$, si rende continua con l'aggiunta della funzione puntiforme $x \operatorname{Punt} \operatorname{Fr} x^{-1}$ e si ha

$$\int x \operatorname{sgn} \operatorname{Fr} x^{-1} dx = \int x \,\{ \operatorname{sgn} \operatorname{Fr} x^{-1} + \operatorname{Punt} \operatorname{Fr} x^{-1} \}\, dx = \int x dx = \frac{1}{2} x^2. \tag{4}$$

Se la funzione data oltre i tagli, che sono, come si è visto, delle discontinuità « *eliminabili* », comprendeva anche altre discontinuità della specie *b*), *c*), dopo eliminati i punti isolati e resa la funzione continua a destra, due casi possono presentarsi:

1°) la funzione data, mediante opportuni scorrimenti nei successivi intervalli, può essere ridotta alla somma di una funzione continua che ha una espressione analitica unica e di una costante discontinua (*funzione dei salti*);

2°) tale unificazione analitica non è possibile nel modo anzidetto, con le funzioni continue ordinarie, ed allora la funzione si riduce ad una combinazione lineare di funzioni continue, diverse da zero in successivi intervalli, più una funzione dei salti.

È un esempio del caso 1°) la funzione $y = x + \operatorname{sgn}(x; 1)$ che è $= x - 1$ per $x < 0$ ed è $= x + 1$ per $x \geq 0$; con uno scorrimento $(x_1 = x; \ y_1 = y - 2)$ del semipiano delle x positive (sem sgn $x = 1$) essa si trasforma nella somma delle due funzioni

$$y_c = x - 1, \quad y_s = 2 \operatorname{sem} \operatorname{sgn}(x; 1) \tag{5}$$

e quindi si ha

$$\int y dx = \int (y_c + y_s) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 - x\right) + 2x \operatorname{sem} \operatorname{sgn}(x; 1). \tag{6}$$

È un esempio del caso 2°) la funzione $y = x \operatorname{Punt} \operatorname{Dir}(x: |i)$ che è $= 0$ per $-1 \leq x < +1$, ed è $= x$ per $x < -1$ e per $x \geq +1$; essa si rende continua con due scorrimenti, uno verso l'alto $(x_1 = x, \ y_1 = y + 1)$ del semipiano a sinistra di $x = -1$, ed uno verso il basso $(x_1 = x, \ y_1 = y - 1)$ del semipiano a destra di $x = 1$. Ma dopo ciò si hanno per il nucleo continuo e la funzione dei salti

$$y_c = (x + 1) \operatorname{sem} \operatorname{sgn}(-x - 1) + (x - 1) \operatorname{sem} \operatorname{sgn}(x - 1) \tag{7}$$

$$y_s = - \operatorname{sem} \operatorname{sgn}(-x - 1) + \operatorname{sem} \operatorname{sgn}(x - 1) \tag{8}$$

il nucleo avendo tre espressioni diverse nei tre intervalli da $-\infty$ a $+\infty$ (che si riducono a due per essere $= 0$ nell'intervallo $-1, +1$). L'integrale ha tuttavia in questo caso una forma semplice essendo

$$\int y dx = \int (y_c + y_s) dx = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \operatorname{Punt} \operatorname{Dir}(x; |i) + C. \tag{9}$$

Come si scorge, nell'uno e nell'altro caso l'integrazione della parte discontinua è sempre immediatamente eseguibile quando si sappiano scrivere le « *funzioni dei salti* » che si ottengono con la « *sommazione* [1] *delle funzioni puntiformi* » che definiscono la discontinuità e delle forme fondamentali delle costanti discontinue così ottenute si conoscano gl'integrali. Queste forme fondamentali delle funzioni discontinue sono quelle qui appresso riportate, insieme con i loro integrali ed i diagrammi delle une e degli altri sono indicati nelle figure da 1 a 20, nelle quali le figure con numeri dispari mostrano le funzioni e quelle con i numeri pari successivi gl'integrali corrispondenti [2].

[1] Per la sommazione delle funzioni puntiformi e per gli integrali fondamentali delle funzioni discontinue, vedasi tre mie Note « R. C. Acc. Naz. dei Lincei », 19 Giugno 1932.

[2] La presente Nota ha formato oggetto di una Comunicazione al Congresso Internazionale dei Matematici di Zurigo (Settembre 1932). Un breve punto di essa sarà pubblicato negli « Atti ».

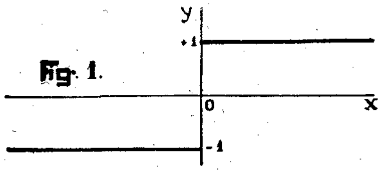

Fig. 1.

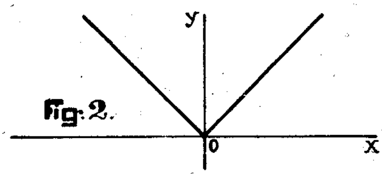

Fig. 2.

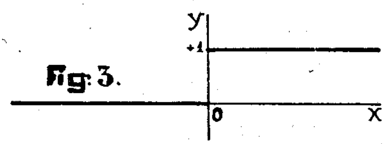

Fig. 3.

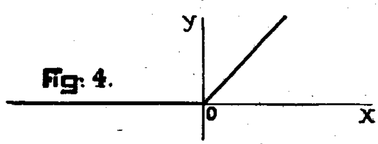

Fig. 4.

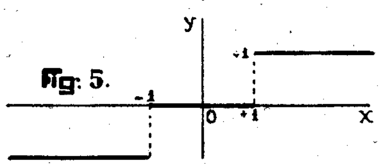

Fig. 5.

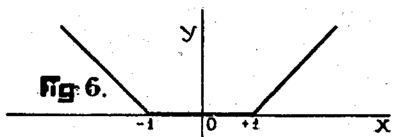

Fig. 6.

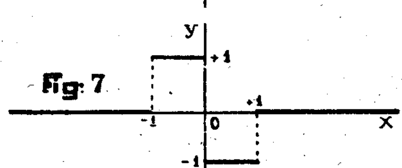

Fig. 7

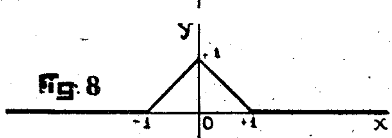

Fig. 8

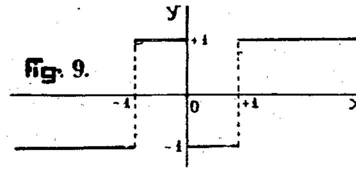

Fig. 9.

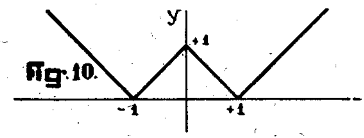

Fig. 10.

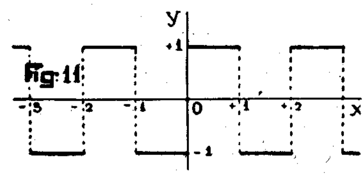

Fig. 11

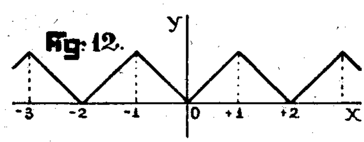

Fig. 12.

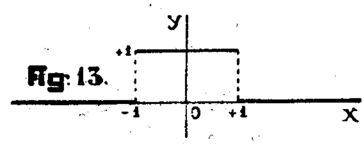

Fig. 13.

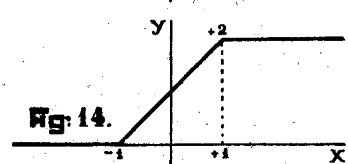

Fig. 14.

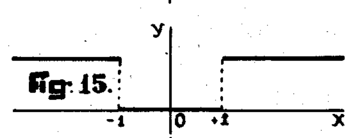

Fig. 15.

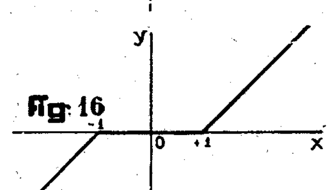

Fig. 16

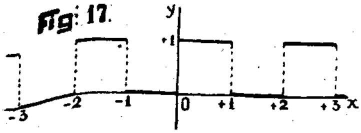

Fig. 17.

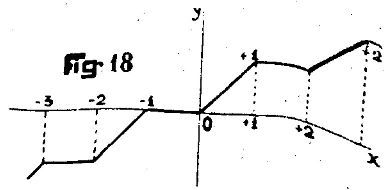

Fig. 18

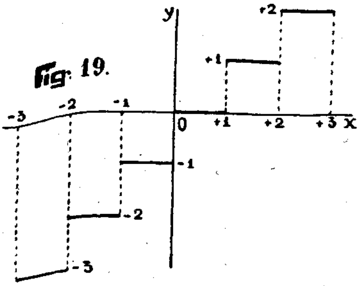

Fig. 19.

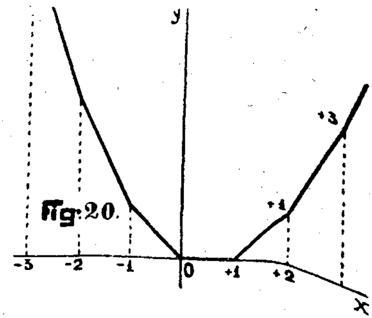

Fig. 20.

(Figg. 1 e 2) $\int \operatorname{sgn}(x;1)dx = x \operatorname{sgn} x.$

(Figg. 3 e 4) $\int \operatorname{sem\,sgn}(x;1)\,dx = x \operatorname{sem\,sgn} x.$

(Figg. 5 e 6) $\int \operatorname{sgn} x \operatorname{Punt\,Dir} x dx = (x \operatorname{sgn} x - 1) \operatorname{Punt\,Dir} x.$

(Figg. 7 e 8) $\int - \operatorname{sgn}(x;1) \operatorname{Dir}(x;1)\,dx = (1 - x \operatorname{sgn} x) \operatorname{Dir} x.$

(Figg. 9 e 10) $\int \operatorname{sgn}(x;1)[1 - 2\operatorname{Dir}(x;1)]\,dx = (x \operatorname{sgn} x - 1)[1 - 2 \operatorname{Dir} x].$

(Figg. 11 e 12) $\int \operatorname{Fal}(x;\,i)\,dx = \operatorname{Plg} x \operatorname{Fal}(x/2).$

(Figg. 13 e 14) $\int \operatorname{Dir}(x;1)\,dx = (x+1)\operatorname{Dir}(x;\,i) + 2 \operatorname{sem\,sgn}(x-1;1).$

(Figg. 15 e 16) $\int \operatorname{Punt\,Dir} x dx = (x - \operatorname{sgn} x) \operatorname{Punt\,Dir} x.$

(Figg. 17 e 18) $\int \operatorname{Fint}(x;\,i)\,dx = \operatorname{Fint} x \operatorname{Fr} x + I\,\frac{x+1}{2}.$

(Figg. 19 e 20) $\int Ix dx = \frac{1}{2}[\,|\,I(x-1)\operatorname{sgn} x\,|^2 + I(x-1)\operatorname{sgn} x] + Ix \operatorname{Fr} x.$