Silvia Martis in Biddau

Sulla caratterizzazione della trasformazione di Laplace mediante le sue proprietà formali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.5, p. 273–277.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_5_273_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1932.

Sulla caratterizzazione della trasformazione di Laplace medìante le sue proprietà formali.

Nota di SILVIA MARTIS in BIDDAU (a Cagliari).

Sunto. - *Si dimostra che certi operatori lineari* E. *definiti dal prof.* PINCHERLE *mediante alcune proprietà formali. sono dati tutti dalle combinazioni lineari a coefficienti costanti di trasformazioni di* LAPLACE.

1. Il prof. PINCHERLE, in un suo lavoro [2], considera quelle trasformazioni funzionali $E(\varphi)=f$ che godono delle seguenti tre proprietà:

a) di far corrispondere a ogni funzione analitica $\varphi(t)$, regolare in un certo campo. una funzione $f(z)$. pure analitica e regolare in un'opportuna regione;

b) di essere distributive;

c) di soddisfare, almeno nei campi accennati in *a)*, alle equazioni

$$\frac{d}{dz}E(\varphi)=E(t\varphi), \tag{1}$$

$$zE(\varphi)=-E\left(\frac{d\varphi}{dt}\right). \tag{2}$$

Egli trova allora che la trasformazione di LAPLACE

$$f(z)=\int e^{zt}\varphi(t)dt \tag{3}$$

appartiene certamente alla classe delle trasformazione E che godono di queste proprietà, classe che denoteremo con $\mathfrak{L}$, se il cam-

[2] S. PINCHERLE, *Della trasformazione di Laplace e di alcune sue applicazioni.* « Mem. dell'Acc. delle Scienze di Bologna », serie IV, 8, 27 febbraio 1887.

quale le funzioni $\varphi(t)$, a cui si applica la trasformazione, si mantengono regolari e monodrome, ottenendosi allora in corrispondenza una funzione $f(z)$ sempre regolare per ogni valore finito di z nel piano complesso. Indichiamo con

$$L_\Lambda(\varphi) = \int_\Lambda e^{zt}\varphi(t)dt \tag{4}$$

queste trasformazioni di LAPLACE, una per ogni curva chiusa Λ del piano complesso; avremo che appartengono alla classe $\mathfrak{L}$ non soltanto esse, ma anche quelle che se ne ottengono alterandole per un fattore costante di proporzionalità, anzi, più generalmente, tutte le loro combinazioni lineari a coefficienti costanti. Resta però aperta la questione di sapere se nella classe $\mathfrak{L}$ esistono altre trasformazioni oltre quelle ora trovate.

Vogliamo ora dimostrare che, con la sola ipotesi aggiuntiva che questi operatori E siano *analitici localmente* nel senso definito dal prof. FANTAPPIÈ in una sua Memoria [1], che cioè, qualora $\varphi(t)$ contenga analiticamente un parametro α, anche la funzione $f(z) = E[\varphi(t)]$ dipenda pure analiticamente dallo stesso parametro, *non esistono altri operatori che godono delle tre proprietà enunciate, oltre le trasformazioni di Laplace* (4) *e le loro combinazioni lineari a coefficienti costanti.*

2. Sia infatti E un operatore della classe $\mathfrak{L}$, cioè con le notazioni usate dal prof. FANTAPPIÈ, un funzionale lineare misto, analitico localmente

$$f(z) = E[\varphi(t); z] \tag{5}$$

e sia

$$v(z, \alpha) = E_t\left[\frac{1}{t-\alpha}; z\right] \tag{6}$$

la cosiddetta funzione indicatrice di questo funzionale. Dalla teoria generale (vedi « F. A. », n. 26), già sappiamo che questa indicatrice risulta una funzione analitica di α, definita e regolare in una o più regioni connesse B_r della sfera complessa ($r = 1, 2, \ldots, n$), potendo rappresentare, in queste diverse regioni (tra loro staccate), rami di funzioni analitiche nel senso di WEIERSTRASS tra loro diverse. L'insieme H delle funzioni $\varphi(t)$ per cui l'operazione E è definita è allora dato (vedi « F. A. », n. 27) dalle funzioni $\varphi(t)$ olomorfe fuori delle regioni B_r, che hanno cioè tutti i loro punti

[1] L. FANTAPPIÈ, *I funzionali analitici*. « Mem. della R. Acc. dei Lincei », serie VI, vol. III, 1930. Questa Memoria verrà indicata nel seguito con « F. A. ».

singolari interni alle regioni stesse, e anzi si può dimostrare (vedi « F. A. », n. 14) che detti punti singolari di una tale funzione $\varphi(t)$ possono sempre racchiudersi entro un numero finito di curve chiuse C_r $(r=1, 2,..., n)$ ognuna giacente per intero, insieme con la regione da essa racchiusa, in una delle regioni B_r in cui l'indicatrice è regolare. Di più il valore dell'operatore E per una tale funzione $\varphi(t)$ viene dato (vedi « F. A. », n. 33) dall'espressione integrale

$$(7) \qquad f(z)=E[\varphi(t); z]=\sum_1^n {}_r \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} v(z, t)\varphi(t)dt.$$

Gli operatori E risulteranno dunque completamente individuati se dalle proprietà *a)*, *b)*, *c)* riusciamo a ricavare la forma della loro indicatrice, poichè allora, mediante la (7), potremo calcolarne il valore per ogni funzione $\varphi(t)$ del loro campo di definizione.

Ora, dalla proprietà *c)* formola (2), ricordando la definizione (6) dell'indicatrice, si ha per $\varphi(t)=\frac{1}{t-\alpha}$

$$(8) \qquad zv(z, \alpha)=-E\left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t-\alpha}; z\right]=E\left[\frac{1}{(t-\alpha)^2}; z\right]=\frac{\partial}{\partial\alpha}E\left[\frac{1}{t-\alpha}; z\right]$$

cioè

$$(9) \qquad zv=\frac{\partial v}{\partial\alpha}$$

da cui si ricava che, per α variabile entro ciascuna delle regioni B_r, dev'esser sempre

$$\log v=z\alpha+\log k(z)$$

$$(10) \qquad v(z, \alpha)=k(z)e^{z\alpha}$$

essendo $k(z)$ una funzione analitica della sola z, eventualmente diversa per le diverse regioni B_r.

Dovendo poi valere, per la proprietà *c)*, anche la (1) *qualunque sia la funzione* φ *del campo* H *di definizione di* E, avremo che a questo campo deve appartenere, insieme con una funzione $\varphi(t)$, anche la funzione $t\varphi(t)$, e poichè a questo campo appartengono certo le funzioni $\varphi(t)=\frac{1}{t-\alpha}$, per ogni valore di α interno alle regioni B_r, ad esse dovranno anche appartenere le funzioni $\frac{t}{t-\alpha}$, le quali, pur essendo regolari nel senso ordinario, ma diverse da zero all'infinito, debbono da noi essere considerate come singolari all'infinito (vedi « F. A. », n. 5). Dunque l'infinito deve essere un punto interno a qualcuna delle regioni B_r (regione che indicheremo con $\bar{B}$), entro le quali soltanto possono cadere i punti singolari delle funzioni φ del campo funzionale H. Di più, nella regione $\bar{B}$ l'indicatrice $v(z, \alpha)$ deve mantenersi sempre regolare, come funzione di α, anzi regolare e nulla per $\alpha = \infty$; ma perchè ciò sia possibile bisognerà che nell'espressione (10) dell'indicatrice sia identicamente $k(z) = 0$, altrimenti l'indicatrice sarebbe certo singolare per $\alpha = \infty$. Dunque, intanto, *nella regione* $\bar{\mathrm{B}}$ *contenente nel suo interno il punto* $\alpha = \infty$ *la indicatrice* $\mathrm{v}(\mathrm{z}, \alpha)$ *deve essere identicamente nulla.*

Volendo quindi che l'operatore E non si riduca all'operatore banale che fa corrispondere lo zero a tutte le funzioni $\varphi(t)$, *dovranno esistere altre regioni* $\mathrm{B_r}$, *staccate da* $\bar{\mathrm{B}}$, nelle quali l'indicatrice non sia identicamente nulla, non sia cioè, per la (10), $k(z)$ identicamente nulla. Per ogni valore di α interno a una di queste regioni B_r, la funzione $\varphi(t) = \dfrac{1}{t - \alpha}$ apparterrà al campo H di definizione di E, e applicando la formola generale (7) avremo, per la funzione $f(z)$ corrispondente l'espressione

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} k(z) e^{zt} \frac{1}{t - \alpha}\, dt = k(z) e^{z\alpha} \tag{11}$$

ove C_r è una curva chiusa racchiudente il punto $t = \alpha$ e tutta interna, insieme con la regione da essa racchiusa, alla regione B_r. Derivando rapporto a z avremo allora

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} k'(z) e^{zt} \frac{1}{t - \alpha}\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} k(z) e^{zt} \frac{t}{t - \alpha}\, dt \tag{12}$$

cioè

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} k(z) e^{zt} \frac{t}{t - \alpha}\, dt + k'(z) e^{z\alpha}. \tag{13}$$

Ma dovendo valere, per la proprietà *c)*, anche la (1), dovrà essere

$$\frac{df}{dz} = E\left[\frac{t}{t - \alpha};\ z\right] \tag{14}$$

che possiamo calcolare applicando ancora la formola generale (7), tenendo conto che ora la funzione $\dfrac{t}{t - \alpha}$ è singolare, oltre che per $t = \alpha$, anche per $t = \infty$, essendo ivi diversa da zero. In questo caso quindi il secondo membro della formola (7) consterà di due integrali, uno esteso, per esempio, alla stessa curva C_r nella regione B_r, che racchiude il punto singolare $t = \alpha$, l'altro a una curva $\bar{C}$, racchiudente il punto singolare $t = \infty$, interna, con la regione da essa racchiusa alla regione $\bar{B}$. Ma in $\bar{B}$ l'indicatrice è identicamente nulla, come abbiamo già visto; resta dunque, come espressione della (14) mediante la formola (7),

$$\frac{df}{dz} = E\left[\frac{t}{t-\alpha}; z\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} k(z)e^{zt}\frac{t}{t-\alpha}dt \tag{15}$$

cioè il solo primo termine del secondo membro della (13). D'altra parte devono coincidere, per la (1), le espressioni (13) e (14) per ogni valore di z; dovrà dunque essere identicamente

$$k'(z)e^{z\alpha} = 0 \tag{16}$$

cioè $k'(z) = 0$, e quindi k *costante*.

Abbiamo dunque in conclusione che *l'indicatrice* $v(z, \alpha)$ *di un'operazione* E *della classe* $\mathfrak{L}$, *che goda cioè delle tre proprietà a), b), c), deve esser definita, se l'operatore non dà per risultato identicamente zero, in più regioni staccate* B_r *della sfera complessa in una delle quali,* $\overline{B}$, *contenente l'* ∞, *la* v *è anzi identicamente nulla, mentre nelle rimanenti regioni essa è data da espressioni del tipo* $k_r e^{z\alpha}$, *essendo* k_r *una costante che può essere diversa per ciascuna regione* B_r.

Sostituendo allora queste espressioni dell'indicatrice nella formola generale (7) avremo, per la funzione $f(z)$ corrispondente per un'operazione E a una funzione $\varphi(t)$, l'espressione generale

$$f(z) = E[\varphi(t); z] = \sum_{1}^{n}{}_r \frac{k_r}{2\pi i}\int_{C_r} e^{zt}\varphi(t)dt \tag{17}$$

cioè, ricordando le (4),

$$f(z) = E[\varphi(t); z] = \sum_{1}^{n}{}_r \frac{k_r}{2\pi i} L_{C_r}(\varphi) \tag{18}$$

da cui risulta infine che *un'operatore* E *che goda delle tre proprietà a), b), c), cioè della classe* $\mathfrak{L}$, *è sempre dato da una combinazione lineare a coefficienti costanti di trasformazioni di Laplace del tipo* (4), e quindi non esistono in $\mathfrak{L}$ altri operatori oltre questi.

Da ciò che precede risulta chiara l'utilità che si può trarre dalla teoria generale dei funzionali analitici nello studio di questioni come questa, già presentatasi da tempo nell'analisi matematica; dalla definizione degli operatori E della classe $\mathfrak{L}$ mediante le loro proprietà formali *a), b), c)* abbiamo infatti potuto ricavare altrettante proprietà per le loro indicatrici v, cioè le equazioni (9) e (16) nelle funzioni incognite v e k, sufficienti alla determinazione di queste funzioni, e quindi, mediante la formola generale (7), sufficienti anche a dare un'espressione esplicita generale per gli operatori E stessi.