
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

AMBROGIO LONGHI

Sui gruppi ciclici di terzo ordine
per una corrispondenza
simmetrica, non singolare, data
sopra un ente algebrico ∞^1 di
genere qualunque

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 11 (1932), n.5, p. 269–273.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_5_269_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_5_269_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1932.

**Sui gruppi ciclici di terzo ordine per una corrispondenza
simmetrica, non singolare, data sopra un ente
algebrico ∞^1 di genere qualunque.**

Nota di AMBROGIO LONGHI (a Lugano).

Sunto. - *Determinazione del numero delle terne di elementi a due a due coniugati in una corrispondenza simmetrica, di grado α e di valenza γ , data sopra un ente algebrico ∞^1 di genere p .*

1. Ogni corrispondenza algebrica T , fra gli elementi di un ente algebrico ∞^1 , ammette in generale dei gruppi ciclici di dato ordine v : intendendosi per un tale gruppo un insieme di v elementi distinti ⁽¹⁾ e ordinabili in modo che due di essi si corrispondono in T sempre e soltanto quando sono consecutivi: ritenuto il primo come consecutivo dell'ultimo.

Supposta la corrispondenza T non singolare (secondo HURWITZ), cioè dotata di valenza, il numero dei relativi gruppi ciclici d'ordine v (quando non ne esistano infiniti) risulta da una formula del SEVERI ⁽²⁾, purchè si tratti di una corrispondenza T asimmetrica ⁽³⁾: nel caso di una corrispondenza simmetrica, in questa breve Nota mi limito alla determinazione del numero delle terne cicliche ($v=3$), in vista di varie applicazioni che seguiranno in due altri lavori ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ Cioè: appartenenti a rami diversi dell'ente, identificato ad una curva.

⁽²⁾ F. SEVERI, *Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio*. [*Memorie Accad. Torino*], 51, (2), 1901], n. 4.

⁽³⁾ Che la formula suddetta non sia valida quando T è simmetrica, si verifica facilmente con esempi.

⁽⁴⁾ Di prossima pubblicazione coi titoli: *Alcuni risultati di geometria numerativa...* e *Un teorema di geometria numerativa concernente le serie di gruppi di punti sopra una curva algebrica.*

2. Sia Ω una corrispondenza algebrica (z, x) , simmetrica e di valenza γ ⁽¹⁾, posta fra gli elementi di un ente algebrico irriducibile, semplicemente infinito e di genere p .

Gli z elementi *coniugati* (cioè corrispondenti), in Ω , di un elemento Q si indicheranno con Q_h ($h=1, 2, \dots, z$); e i coniugati di un elemento Q_h , con Q_{hk} ($k=1, 2, \dots, x$).

Fissato Q , restano determinate le z^2 terne (QQ_hQ_{hk}) aventi la proprietà che ogni loro elemento, diverso dal primo, è coniugato del precedente.

Per qualche particolare terna $(QQ_hQ_{h'k'})$ potrà inoltre avvenire che il primo elemento sia coniugato dell'ultimo: allora $Q_{h'k'}$ dev'essere pure (a causa della simmetria di Ω) un elemento $Q_{h''}$, coniugato di Q . E ne deriva che *se una terna $(QQ_hQ_{h'k'})$ ha il primo elemento Q coniugato del terzo, si verifica necessariamente uno dei seguenti casi:*

a) Q è unito in Ω : quando con Q coincide ⁽²⁾ uno almeno dei due elementi $Q_{h'}$ e $Q_{h''} = Q_{h'k'}$;

b) Q è coniugato di un elemento distinto da Q (cfr. n. 1, nota prima) e unito in Ω : quando $Q_{h''}$, ossia $Q_{h'k'}$, coincide con $Q_{h'}$ ma non con Q ;

c) Q appartiene ad un gruppo ciclico di 3° ordine (n. 1) per Ω : quando Q , $Q_{h'}$ e $Q_{h''} = Q_{h'k'}$ sono a due a due distinti.

Inversamente:

a') Sia Q un elemento unito di Ω , il quale coincida con uno solo, Q_1 , degli z coniugati Q_h . Detto Q_{h_1} quello (supposto unico) dei coniugati Q_{hk} di Q_h , che si sovrappone a Q , e quindi a Q_1 , è ovvio che tanto le z terne $(QQ_hQ_{h_1})$ quanto le z altre (QQ_1Q_{1h}) , ed in generale esse sole, sono del tipo $(QQ_hQ_{h'k'})$ col primo elemento coniugato del terzo.

Tali terne sono poi tutte distinte, ad eccezione delle due corrispondenti al valore 1 di h e di k ; dunque Q dà generalmente origine a $2z-1$ terne $(QQ_hQ_{h'k'})$ con l'elemento Q coniugato di $Q_{h'k'}$.

b') Sia Q uno degli $z-1$ elementi coniugati di un altro elemento U unito in Ω , e distinti da esso (che, come sopra, si suppone coincidere con uno solo dei propri coniugati). Esiste allora, in generale, un'unica terna $(QQ_hQ_{h'k'})$ col primo elemento coniugato del terzo: quella per cui è $Q_{h'} = U$, come pure $Q_{h'k'} = U$.

⁽¹⁾ Eventualmente negativa: A. HURWITZ. *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip*. [« Math. Annalen », 28, 1887; oppure: « Math. Werke », Bd. I, (Basel, 1932), p. 163], § 2.

⁽²⁾ Dicendosi che due elementi *coincidono*, si sottintenda sempre che tale coincidenza deve avvenire sopra uno stesso ramo dell'ente, supposto identificato ad una curva.

c') Sia infine Q uno dei tre elementi di un gruppo ciclico di 3° ordine per Ω . Se R ed S sono gli altri due ⁽¹⁾, è subito visto che *in generale una terna* $(QQ_h Q_{h'k'})$ *ha il primo elemento coniugato dell'ultimo in due soli casi*: cioè quando Q_h cade in R oppure in S , e nello stesso tempo $Q_{h'k'}$ cade rispettivamente in S o in R .

Dopo ciò riesce facile la determinazione del numero α dei gruppi ciclici, di 3° ordine, esistenti per la corrispondenza Ω .

Basta osservare che, per la Ω , il numero di tutte le terne $(QQ_h Q_{h'k'})$, con Q coniugato di $Q_{h'k'}$, è ⁽²⁾:

$$2x^2 + 2\gamma^2 p,$$

mentre è ⁽³⁾ $2x + 2\gamma p$ il numero degli elementi uniti.

Ammettendo che nessuno di questi coincida con due, o più, dei propri coniugati, dalle considerazioni suesposte risulta senz'altro la validità, in generale, della formula:

$$(1) \quad (2x-1)(2x+2\gamma p) + (\alpha-1)(2x+2\gamma p) + 6x = 2x^3 + 2\gamma^3 p,$$

la quale permette appunto il calcolo di α .

3. Si può notare che $2x^2 + 2\gamma^2 p$ è pure il numero degli elementi uniti nella corrispondenza Ω^2 , ottenuta applicando tre volte successivamente le operazioni della Ω .

Tali elementi uniti non differiscono dagli elementi Q sopra considerati (n. 2) nei casi a), b), c); onde la (1) mostra che la *multiplicità* di un elemento Q unito in Ω^2 è $2x-1$ nel caso a), è 1 nel caso b) ed è 2 nel caso c).

A questo stesso risultato, e quindi di nuovo alla formula (1), si perviene anche per altra via.

Si supponga infatti trasportata la corrispondenza Ω , e con essa la Ω^2 , sopra una curva piana Γ , di genere p ; e siano: Q un punto di Γ unito in Ω^2 , μ la rispettiva molteplicità, Q' un altro punto variabile su Γ e tendente a Q .

Nel caso a), Q è pure un punto unito (da supporre semplice) di Ω , e in generale accade che esso, mentre coincide con uno solo degli α coniugati in Ω , viene invece a coincidere con $2\alpha-1$ degli α^2 suoi corrispondenti in Ω^2 ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ Necessariamente distinti (per la definizione data di gruppo ciclico) l'uno dall'altro, come pure da Q .

⁽²⁾ A. HURWITZ, loc. cit., § 5.

⁽³⁾ A. HURWITZ, loc. cit., § 4.

⁽⁴⁾ Infatti il terzo elemento di ognuna delle $2\alpha-1$ terne $(QQ_h Q_{h'k'})$ prima considerate (n. 2) in a'), ha fra i suoi coniugati in Ω (i quali sono poi corrispondenti di Q in Ω^2) l'elemento Q .

Ne deriva che fra i coniugati di Q' in Ω ve n'è uno solo, sia Q_1' , avente da Q' una distanza $Q'Q_1'$ infinitesima (cioè tendente a zero insieme con l'altra QQ'), mentre sono $2x-1$ i punti $Q^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, 2x-1$) corrispondenti di Q' in Ω^2 e posti a distanza infinitesima da Q' .

Per una nota regola di ZEUTHEN ⁽¹⁾, si ha allora (ammesso, per semplicità, che Q non sia un punto multiplo di Γ):

$$\mu = \sum_{i=1}^{2x-1} \mu_i,$$

ove μ_i è l'ordine dell'infinitesimo $Q'Q^{(i)}$ rispetto a QQ' , assunto come infinitesimo principale.

Ma si verifica subito che, a motivo della simmetria di Ω , fra gli x^2 punti omologhi di Q' in Ω^2 ve ne sono sempre $2x-1$ sovrapposti ad un qualunque coniugato di Q' in Ω : se questo coniugato è Q_1' (l'unico avente da Q una distanza infinitesima), tali $2x-1$ punti non possono essere che i suddetti $Q^{(i)}$.

Pertanto tutti i segmenti $Q'Q^{(i)}$ coincidono con $Q'Q_1'$, il quale (per la stessa regola di ZEUTHEN) è *infinitesimo di 1° ordine rispetto a QQ'* : giacchè Q è semplice come elemento unito di Ω .

Si ha dunque $\mu_i = 1$, e quindi $\mu = 2x-1$.

Anche più facilmente si prova che per l'elemento Q , unito in Ω^2 , è $\mu = 1$ nel caso b) e $\mu = 2$ nel caso c).

4. Dalla formula (1) del n. 2 si ricava:

$$x = \frac{1}{3} x(x-1)(x-2) + \frac{1}{3} \gamma(\gamma^2 - 3x + 2)p,$$

e si può quindi concludere ⁽²⁾ col seguente teorema:

Il numero delle terne di elementi distinti ⁽³⁾ e a due a due coniugati in una corrispondenza simmetrica di grado x e di valenza γ (positiva, nulla, o negativa), data sopra un ente algebrico ∞^1 , irriducibile e di genere p , è in generale ⁽⁴⁾ uguale a:

$$2 \binom{x}{3} + 2 \binom{\gamma}{3} p - \gamma(x - \gamma)p.$$

⁽¹⁾ H. G. ZEUTHEN, *Nouvelle démonstration du principe de correspondance...* (« Math. Annalen », 40, 1892), § 1. Cfr. pure F. SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, parte I (Bologna, 1926), pp. 226-231.

⁽²⁾ Ponendo $\frac{1}{6} \gamma(\gamma-1)(\gamma-2) = \binom{\gamma}{3}$ anche se γ è negativo.

⁽³⁾ Nel senso già precisato (n. 1, nota prima).

⁽⁴⁾ La locuzione « in generale » è qui intesa soltanto ad escludere l'esistenza di infinite terne aventi la proprietà detta.

se si suppone la corrispondenza priva di particolarità relative ai suoi elementi uniti ⁽¹⁾.

Compatibilmente con tale ipotesi, l'ente può essere dotato di singolarità qualunque.

(1) Generalmente basta supporre che ogni elemento unito coincida con uno solo dei propri coniugati e non sia multiplo per la corrispondenza (pur potendo essere multiplo per l'ente): sicchè in esso non vengano mai a coincidere due o più coniugati di un elemento di diramazione.