Carlo Bussi

Sull'ultimo teorema di Fermat

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.5, p. 267–269.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_5_267_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1932.

Sull'ultimo teorema di Fermat.

Nota di CARLO BUSSI (a Moncalieri).

Sunto. - *Si dimostra un caso particolare dell'ultimo teorema di* FERMA *e si stabilisce una condizione, alla quale dovrebbero soddisfare, se esi stessero, le soluzioni intere dell'equazione* $x^n + y^n = z^n$.

È stato dimostrato ([1]) che, in casi particolari, una delle condi zioni necessarie perchè l'equazione

$$x^n + y^n = z^n \tag{1}$$

sia risolvibile in numeri interi, è che i tre numeri $x = a$, $y = l$ $z = c$ non sieno tutti primi con n.

([1]) Tra gli altri LEGENDRE, « Comptes Rendus », VI: quando n è prim ed è pure primo uno dei numeri $2n+1$, $4n+1$, $8n+1$, $10n+1$. KUMME « Journal de Liouville », XVI, 1851, pag. 377: per n primo che non d vida il numeratore degli $\frac{n-3}{2}$ primi numeri di Bernoulli. L. E. DICKSO « Quarterly Journal », LX, 1908, pag. 27, per n primo < 6857.

Intendo ora generalizzare questa proposizione e dimostrare che l'equazione data non ha soluzioni intere tutte prime con un numero $k > 2$, tale che $\varphi(k) = n$, dove $\varphi(k)$ è l'indicatore di k.

Difatti, se le dette soluzioni esistessero, avremmo l'identità

$$a^{\varphi(k)} + b^{\varphi(k)} = c^{\varphi(k)}. \tag{2}$$

Ma, essendo a, b, c primi con k, abbiamo le congruenze mod. k

$$a^{\varphi(k)} \equiv 1, \quad b^{\varphi(k)} \equiv 1, \quad c^{\varphi(k)} \equiv 1.$$

Poichè la somma delle due prime è incompatibile con la terza, l'identità (2) non sussiste: dunque la (1) non ha le soluzioni intere $x = a$, $y = b$, $z = c$.

Osservazione 1ª. — Un'ulteriore generalizzazione si ottiene, pensando che, dato $\varphi(k)$, k non è determinato univocamente; giacchè in generale l'indicatore $\varphi(k)$ corrisponde a più di un numero k. Ne consegue che l'equazione (1) non ha soluzioni intere tutte prime coi numeri $k_i > 2$ tali che $\varphi(k_i) = n$.

Osservazione 2ª. — Per i numeri $k_i > 2$, $\varphi(k_i)$ è sempre pari. Dunque il teorema di Fermat rimane dimostrato per qualsiasi esponente pari, che sia l'indicatore euleriano di un numero relativamente primo con x, y, z.

Osservazione 3ª. — Da quanto sopra, si deduce che sarebbe condizione necessaria perchè esistano soluzioni intere $x = a$, $y = b$, $z = c$ della (1), che almeno uno dei numeri a, b, c ammettesse almeno un fattore comune con i numeri k_i.

Se per esempio $n = 2$, i numeri k_i sono 3, 4, 6. Ne consegue il risultato notissimo che, in questo caso, uno dei numeri x, y, z deve essere pari ed uno divisibile per 3.

Indipendentemente da quanto finora esposto, intendo ora dimostrare che se esistessero soluzioni intere di (1), la differenza $z - y$ non potrebbe superare $x - 2$.

Difatti, poichè è necessariamente $z > y$ e $y \neq x$ (donde la supposizione lecita che sia $y > x$), si ponga $z = y + r$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$.

Sostituendo in (1) e sviluppando, si ha

$$r^n + nyr^{n-1} + \ldots + ny^{n-1}r = x^n$$

dove tutti i termini sono positivi. Il che dà $ny^{n-1}r < x^n$. Essendo poi $y^{n-1} > x^{n-1}$, sarà

$$nr < x. \tag{3}$$

Poichè il caso $r = x$ è necessariamente escluso, sia, per es., $r = x - 1$.

Ora, la $F(x) = x/x - 1$ è positiva ma decresce da 2 a 1, quando $x \geqq 2$ tende all'infinito. Dunque $n < 2$, cioè $n = 0$ oppure $n = 1$.

Ma il caso $n = 0$ è inammissibile e se $n = 1$, dovrebbe essere $r = x$ contrariamente all'ipotesi.

Sia allora $r = x - 2$. La $F_1(x) = x/x - 2$ indica allora che deve essere $n < 3$, cioè $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$. Scartati come sopra i primi due casi, rimane $n = 2$, che dà la relazione verificabile in numeri interi

$$x^2 + y^2 = (y + x - 2)^2.$$

Può dunque essere $r = x - 2$ e non $r > x - 2$.