Bollettino Unione Matematica Italiana

Beniamino Segre

Alcuni risultati di Geometria algebrica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.5, p. 265–267.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_5_265_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1932.

Alcuni risultati di Geometria algebrica.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Bologna) (*).

Sunto. - *L'A. riassume alcune sue recenti ricerche, relative alla determinazione di certi* gruppi covarianti *di due o più serie lineari, alle condizioni per la* regolarità *di un sistema lineare di forme, ed alle superficie aventi il sistema canonico* composto *con un'involuzione* (1).

1. L'insieme G dei gruppi di $r+s$ punti comuni a due serie lineari g_n^r, g_m^s, su di una curva algebrica di genere p, soddisfa all'*equivalenza*:

$$G \equiv \alpha A + \beta B - \gamma K,$$

ove A è un gruppo di g_n^r, B un gruppo di g_m^s, K un gruppo canonico, ed inoltre:

$$\alpha = \sum_0 {}_i(-1)^i \binom{n-r-i-1}{s-i-1}\binom{m-s-i-1}{r-i}\binom{p-1}{i}$$

$$\beta = \sum_0 {}_i(-1)^i \binom{n-r-i-1}{s-i}\binom{m-s-i-1}{r-i-1}\binom{p-1}{i}$$

$$\gamma = \sum_0 {}_i(-1)^i \binom{n-r-i-2}{s-i-1}\binom{m-s-i-2}{r-i-1}\binom{p-2}{i}.$$

(*) Comunicazione letta alla XXI Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, Ottobre 1932.

(1) I risultati che qui vengono esposti, si troveranno dimostrati — insieme ad altri — in tre lavori che usciranno prossimamente nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » e nei « Rendiconti della R. Acc. Nazionale dei Lincei ».

Questo risultato è contenuto in un altro più generale — relativo ad un numero qualsiasi di serie lineari — che comprende una proposizione di COMESSATTI; esso porge il *significato geometrico-funzionale* di una nota formula numerativa di CASTELNUOVO ed inoltre permette di dimostrare, per via algebrico-geometrica, che *le varietà di Jacobi hanno genere geometrico unitario e varietà canonica d'ordine zero.*

2. Dato in S_{r+1} un sistema lineare (F_r^n), privo di parte fissa, di forme d'ordine n, esso individua un sistema *completo* $|F_r^n|$, la cui dimensione virtuale $\delta_n^{(r)}$ si calcola valendosi della ben nota *formula di postulazione.* La differenza

$$\omega_n^{(r)} = d_n^{(r)} - \delta_n^{(r)}$$

fra la dimensione effettiva $d_n^{(r)}$ di (F_r^n) e la dimensione virtuale di $|F_r^n|$, verrà detta brevemente *lo scarto* di (F_r^n).

Se si considerano in S_{r+1} sistemi lineari completi $|F_r^n|$, $|F_r^{n+1}|, \ldots$ definiti dalle stesse varietà base colle stesse molteplicità, e di ordini via via crescenti, i relativi scarti riescono tutti nulli a partire da un certo valore dell'ordine n; allora — ove si avesse unicamente riguardo a ciò che succede pei sistemi lineari di curve piane (caso di $r=1$) — verrebbe fatto di denominare *regolari* i suddetti sistemi, da quell'n in poi. Però, come già mostra la teoria dei sistemi lineari di superficie (caso di $r=2$), la definizione che così si darebbe non è la più conveniente per le applicazioni; è più utile invece, uniformandosi a quest'ultimo caso, di esigere per la regolarità di $|F_r^n|$ che *tutti i sistemi* $|F_r^{n+1}|$, $|F_r^{n+2}|, \ldots$ *seghino un iperpiano generico secondo sistemi lineari completi e regolari*, ciò che implica l'annullarsi degli scarti di $|F_r^n|$, $|F_r^{n+1}|, \ldots$

La nozione di *sistema regolare di forme*, essendo in tal guisa acquisita in S_{r+1} non appena la si possegga in S_r, resta in ogni caso determinata per induzione completa, solo che si convenga che *per* $r=0$ — *ossia sulla retta — ogni serie lineare è regolare*; per $r=1, 2$ essa non differisce da quella ben nota, relativa ai sistemi lineari di curve e di superficie.

La suddetta definizione — per quanto spontanea — si presenta assai scomoda per le applicazioni, sia perchè basata su di un processo d'induzione, sia perchè esige la considerazione degli infiniti sistemi lineari $|F_r^{n+1}|$, $|F_r^{n+2}|, \ldots$ Vale però il seguente criterio (che dà già qualcosa di nuovo per $r=1$, ossia pei sistemi lineari di curve piane), secondo cui, per decidere della regolarità di un sistema lineare assegnato in S_{r+1}, si è condotti ad effettuare un numero *finito* $(=r)$ di verifiche:

Condizione necessaria e sufficiente per la regolarità di $|F_r^n|$, *è che si annullino gli scarti dei sistemi lineari che* $|F_r^{n+1}|$, $|F_r^{n+2}|, \ldots,$ $|F_r^{n+r}|$ *rispettivamente segano su di un generico* $S_r, S_{r-1}, \ldots, S_1$ *di* S_{r+1}.

3. Mentre su di una curva algebrica la serie canonica — se non è semplice — risulta necessariamente composta con una g_2^1 (curve iperellittiche), esistono notoriamente *superficie algebriche col sistema canonico appartenente ad una involuzione d'ordine* $n > 2$. Basta infatti pensare che sulle superficie aventi $p_g = 3$ e $p^{(1)} > 3$, il sistema canonico è una *rete* (non composta con un fascio) di grado $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$, che quindi appartiene ad un'involuzione d'ordine $p^{(2)} > 2$; e si prova facilmente l'esistenza di superficie siffatte.

Ebbene, *esistono anche superficie con* $p_g > 3$ *presentanti la suddetta particolarità*, il che finora era dubbio. Si ha ad esempio una superficie (regolare) con $p_g = 4$, $p^{(1)} = 9$, avente il sistema canonico composto con un'involuzione del 4° ordine, considerando una *superficie* F^6 *del* 6° *ordine* — di cui può provarsi l'effettiva esistenza — avente come uniche singolarità *due punti doppi, tali che le sezioni piane di* F^6 *che contengono l'uno o l'altro di essi abbiano di conseguenza un oscnodo.*