Bollettino
Unione Matematica
Italiana

S. P. Slouguinoff

Sulla questione della classificazione dei sistemi di numeri

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.4, p. 229–233.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_4_229_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1932.

RELAZIONI SCIENTIFICHE

Sulla questione della classificazione dei sistemi di numeri.

La questione della classificazione dei sistemi di numeri, assai difficile e che, anche ai giorni nostri, è ben lungi di essere esaurita, ha, per la sua importanza, attratta l'attenzione di eminenti matematici. Diamo, nel presente articolo, un saggio di classificazione di quei sistemi numerici che presentano un particolare interesse.

Fra gl'innumerevoli sistemi numerici, ci sembra di poter distinguere due principali categorie: 1°) sistemi di numeri ipercomplessi; 2°) sistemi costruiti sulla nozione di corpi numerici. Nel primo tipo, ufficio essenziale è quello delle espressioni lineari della forma

$$a = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k, \tag{1}$$

dove e_0 è un'unità reale, e_1, e_2,... e_n sono unità complesse fra loro irriducibili, e i coefficienti (coordinate) a_0, a_1,... a_n sono numeri reali, o, più generalmente, numeri complessi ordinari. L'insieme degli elementi e_0, e_1,... e_n viene generalmente detto *base* del sistema di numeri ipercomplessi [1]; stabilita questa base, ad ogni numero ipercomplesso del sistema corrisponde una $n+1$–pla ben definita dei numeri a_0, a_1,... a_n, e reciprocamente.

L'uguaglianza, la somma, la differenza, il prodotto per un numero ordinario si definiscono per i numeri ipercomplessi come per i numeri complessi ordinari: ma le difficoltà si presentano quando il concetto di moltiplicazione si vuole estendere al caso di fattori ipercomplessi. Si ammetta che, essendo

$$a = \sum_k a_k e_k, \quad b = \sum_l b_l e_l,$$

[1] V. p. es. E. Cartan, *Nombres Complexes*, nella « Encyclopédie des Sciences mathématiques », t. 1, v. 1, fasc. 3.

sia

$$ab = \sum_{k,l} a_k b_l e_k e_l, \qquad (k,\ l = 0,\ 1,\ 2,\dots\ n);$$

il carattere del prodotto dipenderà dal modo di concepire il prodotto delle unità complesse. Senza dire che il prodotto di a per b non è generalmente commutativo, si può stabilire che il prodotto suddetto generi nuove unità, antecedentemente scelte, ottenendosi così sistemi complessi del tutto nuovi. È in dipendenza delle leggi stabilite per tali prodotti che GRASSMANN ha introdotta la classificazione delle moltiplicazioni, e la moltiplicità delle regole possibili per la moltiplicazione richiede, poi, per la divisione, una ricerca speciale in ogni singolo caso.

Fra i sistemi più semplici di numeri ipercomplessi sono da ricordare i quaternioni e i biquaternioni, che hanno un importante significato in meccanica ed in fisica. I quaternioni possono rappresentarsi nella forma $a = \sum_0^3 a_k e_k$, dove

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

sono le cosidette *matrici-speciali* o *matrici-unità*, e gli a_k sono numeri reali. In base alla regola di moltiplicazione delle matrici, si hanno le formule che legano le unità:

$$(2) \qquad \begin{gathered} e_0 e_k = e_k e_0 = e_k, \quad e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -e_0, \quad e_2 e_3 = e_1, \quad e_3 e_1 = e_2, \\ e_1 e_2 = e_3, \quad e_3 e_2 = -e_1, \quad e_1 e_3 = -e_2, \quad e_2 e_1 = -e_3, \end{gathered}$$

che si possono compendiare nella tavola (quasi Tavola pitagorica)

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & -e_0 & e_1 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & -e_0 . \end{array} \right.$$

I biquaternioni, secondo W. K. CLIFFORD e A. P. KOTELNIKOFF, sono un sistema di numeri ipercomplessi della forma $a = a_0 + \omega a_1$, dove a_0 e a_1 sono quaternioni ed ω è una nuova unità complessa soddisfacente ad una delle condizioni: $\omega^2 = 0$ (sistemi parabolici), $\omega^2 = 1$ (sistemi ellittici), $\omega^2 = -1$ (sistemi iperbolici). La teoria dei biquaternioni ha parte importante nella meccanica delle viti.

Consideriamo ora i sistemi numerici del secondo tipo, quelli cioè fondati sulla nozione di *corpo* di numeri. Mentre nei sistemi del primo tipo il fondamento stava nelle definizioni delle quattro operazioni elementari e nelle leggi associativa e distributiva, oltre alla possibile varietà nella scelta delle unità, i sistemi del secondo tipo sono strettamente legati colla risoluzione e le proprietà dell'equazione algebrica. Il numero α è algebrico, se è radice di un'equazione algebrica della forma

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

a coefficienti razionali; è intero algebrico se $a_0 = 1$ e se $a_1, a_2, \dots a_n$ sono interi razionali. Essendo $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ un sistema di numeri algebrici in numero finito, l'insieme delle funzioni razionali a coefficienti razionali dei numeri del sistema si dice Corpo di numeri (DEDEKIND) o dominio (campo) di razionalità (KRONECKER). Per un tale insieme si conservano le quattro operazioni fondamentali.

Uno dei teoremi fondamentali nella teoria dei Corpi numerici dimostra l'esistenza, in ogni corpo K, di un numero θ avente la proprietà che ogni numero del corpo è funzione razionale intera di θ, a coefficienti razionali. Come numero algebrico, esso soddisfa equazioni algebriche a coefficienti razionali, fra le quali se ne può scindere una di grado minimo; se questo è n, si dirà che n è la *potenza* o *grado* del corpo K. Si dice anche che θ *determina* il corpo K. L'equazione di grado n è irriducibile nel campo dei numeri razionali; reciprocamente, ogni sua radice determina un corpo di grado n; e se $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{n-1}$ sono le altre radici dell'equazione, i corpi $K_1, K_2, \dots K_{n-1}$ da esse determinati costituiscono un sistema di corpi *coniugati* del corpo. Se $\alpha = c_1 + c_2\theta + \dots c_{n-1}\theta^{n-1}$ è un numero qualsiasi di K ($c_1, c_2, \dots c_{n-1}$ interi razionali), le espressioni $\alpha_i = c_1 + c_2\theta_i + \dots c_{n-1}\theta_i^{n-1}$ sono i numeri *coniugati* di α.

Nello studio dei corpi algebrici le nozioni di *base*, di *norma*, di *differente*, di *discriminante* hanno una parte essenziale. È proposizione fondamentale nella teoria dei corpi il teorema che « in un corpo di grado n esistono n numeri interi algebrici $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ tali che ogni intero ω del corpo può rappresentarsi con $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \dots a_n\omega_n$, essendo $a_1, a_2, \dots a_n$ interi razionali ». Il sistema $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n$ è una *base* del corpo; ogni altra base è data da

$$\omega_i^* = a_{i1}\omega_1 + a_{i2}\omega_2 + \dots + a_{in}\omega_n, \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

dove il determinante dei coefficienti è ± 1.

Il prodotto $n(\alpha) = \alpha\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}$ è la *norma* del numero α; essa è un numero razionale, intero se α è un intero algebrico. Se il numero α soddisfa all'equazione

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = 0,$$

allora $n(\alpha) = p_n$; se $p_n = 1$, $n(\alpha) = \pm 1$; in questo caso, α si dice una *unità algebrica*. Essa si può anche definire come un intero il cui inverso è pure un intero. Due numeri si dicono *associati* quando uno di essi si ottiene dall'altro mediante moltiplicazione per una unità.

L'espressione $\delta(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \dots (\alpha - \alpha_{n-1})$ è la *differente* del numero α. La differente di un numero appartiene al corpo K; infatti, se $f(x) = (x - \alpha)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{n-1})$, allora $\delta(\alpha) = f'(x)_{x=\alpha}$. Infine, il *discriminante* di α è definito da

$$d(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)^2(\alpha - \alpha_2)^2 \dots (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \dots (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})^2 = \Sigma \pm \alpha\alpha_1\alpha_2{}^2 \dots \alpha_{n-1}^{n-1}$$

onde

$$d(\alpha) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n(\delta).$$

Se α è un numero che determina il corpo, la sua differente ed il suo discriminante sono diversi da zero; inversamente, se un numero è tale che la sua differente ed il suo discriminante siano diversi da zero, esso determina il corpo. Se α è intero, sono interi la sna differente ed il suo discriminante (HILBERT).

Nello studio dei corpi numerici hanno parte essenziale le leggi di divisibilità e la teoria delle unità. Intanto, vale il teorema più generale di quello testè enunciato, e cioè: « Se il numero ω soddisfa all'equazione

$$\omega^n + \alpha\omega^{n-1} + \beta\omega^{n-2} + \dots + \lambda = 0,$$

dove i numeri α, β, γ,... sono algebrici, ω è pure algebrico, ed è intero se α, β, γ,... sono interi ». Ad esempio, se m ed n sono interi razionali ed α è intero algebrico, anche il numero $\omega = \alpha^{\frac{m}{n}}$ è intero algebrico. Segue anche da questo teorema che il numero dei divisori differenti di ogni intero algebrico è infinito. Allo scopo di creare una teoria della divisibilità dei numeri algebrici che presenti analogia completa colla teoria della divisibilità degli interi razionali, si sono introdotti (da KUMMER e da DEDEKIND) nuovi enti detti *numeri ideali*, di cui però non ci occuperemo nel presente articolo.

Presenta speciale interesse il corpo detto *ciclico*, quello cioè definito dalle radici dell'equazione $x^l = 1$, essendo l un numero primo dispari (DIRICHLET, HILBERT).

Volendo applicare le precedenti generalità a qualche corpo particolare, consideriamo il *corpo quadratico*. Si parte dall'equazione $x^2 - m = 0$, dove m è un intero razionale diverso da 1 e non divisibile per un quadrato. La radice, irriducibile nel campo dei numeri razionali, definisce il corpo $K(\sqrt{m})$, reale o complesso secondo il segno di m, e coincidente col corpo $K(-\sqrt{m})$. Tutti i numeri del corpo hanno la forma $\alpha = a \cdot 1 + b\omega$, dove $\omega = \frac{1+\sqrt{m}}{2}$ o $\omega = \sqrt{m}$, secondo che è $m \equiv 1$ (mod. 4) oppure $m \not\equiv 1$ (mod. 4). I numeri 1 e ω formano la *base fondamentale* del corpo $K(\sqrt{m})$. Il discriminante di α è $d(\alpha) = (\alpha - \alpha')^2$ e quello del corpo è $d = (\omega - \omega')^2$, essendo α' e ω' rispettivamente i coniugati di α e di ω. Si sa che è $d = m$, se $m \equiv 1$ (mod. 4) e $d = 4m$ se è $m \not\equiv 1$ (mod. 4). In quanto alle unità del corpo quadratico, conviene distinguere due casi, secondo che K è un corpo reale od immaginario. I corpi immaginari hanno le sole unità ± 1, eccettuati i corpi $K(\sqrt{-1})$ e $K(\sqrt{-3})$, di cui il primo ha inoltre le due unità $\pm i$, ed il secondo le quattro $\pm \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; i discriminanti di questi ultimi sono -4 e -3, e le norme sono rispettivamente della forma $a^2 + b^2$ e $a^2 + ab + b^2$. In quanto ai corpi quadratici reali, si sa che ognuno ha infinite unità, ed il problema di trovarle si fonda sulla risoluzione dell'equazione di Pell $t^2 - mn^2 = \pm n$, dove $n = \pm 1$ o ± 4 (Sommer, Cahen).

Un esempio interessante di applicazione della teoria generale dei corpi algebrici è dato dal cosidetto *corpo cubico*, dipendente da una delle radici dell'equazione $x^3 - A = 0$; fra gli scienziati che hanno studiata la questione cito i russi A. Markoff, I. Ivanoff e G. Voronoi.

Una classificazione dei sistemi di numeri non può riguardarsi che come approssimativa ed è necessariamente incompleta: così, viene lasciata in disparte l'esame dei numeri trascendenti. Ma un tentativo di classificazione deve essere guidato dal raffronto collo sviluppo storico dello studio dei sistemi di numeri.

S. P. Slouguinoff