Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Luigi Conte

Sui determinanti circolanti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.4, p. 220–224.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_4_220_0>

Sui determinanti circolanti.

Nota di LUIGI CONTE (a Cagliari).

Sunto. - *L'A. studia alcune proprietà dei circolanti, dei gobbo circolanti e dell'equazione* C(x) = 0 *ottenuta uguagliando a zero un circolante ai cui termini principali sia aggiunto* x; *e calcola infine il valore di circolanti particolari.*

1. Consideriamo il circolante d'ordine n

$$C = |a_1 a_2 \dots a_n|.$$

Detto A_i il complemento algebrico dell'elemento a_i considerato nella prima linea, è evidentemente:

$$(\mathrm{a})\qquad \begin{cases} a_1A_1 + a_2A_2 + \dots + a_nA_n = C \\ a_2A_1 + a_3A_2 + \dots + a_1A_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nA_1 + a_1A_2 + \dots + a_{n-1}A_n = 0 \end{cases}$$

da cui, sommando, si ha, con evidente posizione,

$$(1)\qquad C = a \cdot A.$$

Osserviamo ora che gli n^2 minori d'ordine $n-1$ di C sono ad n ad n uguali fra loro, giacchè, com'è facile riconoscere, il complemento algebrico dell'elemento a_i considerato nella prima linea è uguale a quello dello stesso elemento considerato in un'altra qualunque delle linee. Segue da ciò che

$$(2)\qquad nA_r = \frac{\partial C}{\partial a_r}$$

e quindi

$$nC = n\sum_1^n {}_r a_r A_r = \sum_1^n {}_r a_r \frac{\partial C}{\partial a_r} = \sum_1^n {}_r a_r \left(A + a\frac{\partial A}{\partial a_r}\right) = C + a\sum_1^n {}_r a_r \frac{\partial A}{\partial a_r}$$

od infine, per $a \neq 0$,

$$(3)\qquad (n-1)A = \sum_1^n {}_r a_r \frac{\partial A}{\partial a_r}.$$

Perciò: « Se gli a_i sono interi ed $a \neq 0$, $\sum_1^n {}_r a_r \frac{\partial A}{\partial a_r}$ è divisibile per $n-1$ ed il quoziente è A ».

2. Se $a = 0$, siccome $n(A_r - A_s) = a\left(\frac{\partial A}{\partial a_r} - \frac{\partial A}{\partial a_s}\right)$ è

$$A_r = A_s$$

ossia per qualunque r,

$$nA_r = A,$$

cioè: « Se $a = 0$ e gli a_i sono interi, A è divisibile per n ([1]), e quindi $\sum_1^n {}_i\, a_i \frac{\partial A}{\partial a_i}$ è divisibile per $n(n-1)$ ed il quoziente è A_r ».

3. Posto $\varphi(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1}$ è ([2])

$$C = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n)$$

dove le α_i sono le radici (l'unità compresa) dell'equazione $x^n - 1 = 0$.

La (2) può dunque scriversi, per $C \neq 0$,

$$\text{(2')} \qquad \frac{nA_r}{C} = \sum_1^n {}_i \frac{\partial \log \varphi(\alpha_i)}{\partial a_r} = \sum_1^n {}_i \frac{\alpha_i^{r-1}}{\varphi(\alpha_i)}$$

vale a dire: « Se gli a_i sono interi di somma non nulla, $C \cdot \sum_1^n {}_i \frac{\alpha_i^{r-1}}{\varphi(\alpha_i)}$ è divisibile per n ».

4. Consideriamo l'equazione a radici reali:

$$\text{(b)} \qquad C(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 + x \ldots & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_1 & a_{n-1} + x \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando secondo le potenze di x, si ha, per n dispari:

$$C(x) = x^n + \Sigma a_i x^{n-1} + \Sigma\Delta_2 x^{n-2} + \ldots + \Sigma\Delta_{n-1} x + C = 0$$

avendo indicato con $\Sigma\Delta_i$ la somma di tutti i minori principali d'ordine i. È

$$\Sigma_1^n {}_i\, x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n = A$$

$$\text{(c)} \qquad \sum_1^n {}_i \frac{1}{x_i} = -\frac{A}{C} = -\frac{1}{a} = \frac{1}{\Sigma_1^n {}_i\, x_i} \quad \text{([3])}$$

$$\frac{C(1) \pm C(-1)}{2} = \begin{cases} \Sigma a_i + \Sigma\Delta_3 + \Sigma\Delta_5 + \ldots \\ 1 + \Sigma\Delta_2 + \Sigma\Delta_4 + \ldots . \end{cases}$$

([1]) STERNE, « Crelle's J. », vol. LXXIII.

([2]) Vedi PASCAL, *I determinanti*, pag. 114.

([3]) Questa proprietà può essere sfruttata per la risoluzione in numeri interi dell'equazione indeterminata $\sum_1^n {}_i \frac{1}{x_i} = \frac{1}{\Sigma_1^n {}_i\, x_i}$, nel caso di n dispari.

Se $\Sigma a_i = 0$, siccome $C = 0$, è $C(0) = 0$, $\Sigma_i \overset{n-1}{\underset{1}{}} x_i = 0$ e, con a_i interi

$$\sum_1^n {}_i\, x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n$$

è divisibile per n.

Per n pari:

$$C(x) = x^n + 2(a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1})x^{n-1} + \Sigma\Delta_2 x^{n-2} + \dots +$$
$$+ 2(A_1 + A_3 + \dots + A_{n-1})x + C = 0,$$

$$\sum_1^n {}_i\, x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n = -2(A_1 + A_3 + \dots + A_{n-1}).$$

Se $a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1} = 0$

$$\sum_1^n {}_i\, x_i = 0.$$

Se $\Sigma a_i = 0$ è $C(0) = 0$ e $\sum_1^{n-1} {}_i\, x_i = 2(a_2 + a_4 + \dots + a_n)$, e. nel caso di a_i interi,

$$\sum_1^n {}_i\, x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n = -A$$

$$\frac{C(1) \pm C(-1)}{2} = \begin{cases} 1 + \Sigma\Delta_2 + \Sigma\Delta_4 + \dots \\ 2(a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1}) + \Sigma\Delta_3 + \Sigma\Delta_5 + \dots . \end{cases}$$

5. Consideriamo il gobbo circolante C', ottenuto cambiando in C il segno a tutti i termini al disotto della seconda diagonale.

Scrivendo le relazioni analoghe alle (a) e sommando

$$aA' - 2\sum_2^n {}_i (a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1})A_i' = C'. \tag{4}$$

Se quindi $a = 0$

$$C' = -2\sum_2^n {}_i (a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1})A_i'$$

vale a dire, C', se non è zero, è un numero pari il cui valore non dipende da A_1'; per di più un divisore comune ad A_2', A_3', ..., A_n' oppure ad a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, ..., $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ è anche divisore di C'.

Se $\sum_2^n {}_i (a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1})A_i' = 0$, senza che lo sia C', è

$$aA' = C'$$

ossia

$$CA' - AC' = 0$$

e viceversa.

6. Per un teorema di SCOTT, il circolante d'ordine $2m$

$$A = |a_1 a_2 \dots a_m,\ a_{m+1} \dots a_{2m}|$$

è uguale al prodotto del gobbo circolante d'ordine m

$$B = |a_1 - a_{m+1},\ a_2 - a_{m+2}, \dots,\ a_m - a_{2m}|$$

e del circolante pure d'ordine m

$$C = |a_1 + a_{m+1},\ a_2 + a_{m+2}, \dots,\ a_m + a_{2m}|.$$

Se quindi diciamo A_i, B_i, C_i, il complemento algebrico dell'elemento di posto i-esimo nella prima riga di ciascuno di questi tre determinanti, per le (1) e (4) abbiamo

$$\sum_1^{2m}{}_i a_i (A_1 + A_2 + \dots A_{2m}) = \sum_1^{2m}{}_i a_i (C_1 + C_2 + \dots + C_m) \left\{ \left(\sum_1^m a_i - \sum_{m+1}^{2m} a_i \right) \right.$$

$$\left. (B_1 + B_2 + \dots + B_m) - 2 \sum_2^m{}_i (a_1 + \dots + a_{i-1} - a_{m+1} - \dots - a_{m+i-1}) B_i \right\}.$$

Se $\sum_1^{2m}{}_i a_i \neq 0$ è

$$A_1 + A_2 + \dots + A_{2m} = (C_1 + C_2 + \dots + C_m) \left\{ \left(\sum_1^m a_i - \sum_{m+1}^{2m} a_i \right) \right. \tag{5}$$

$$\left. (B_1 + B_2 + \dots + B_m) - 2 \sum_2^m{}_i (a_1 + \dots + a_{i-1} - a_{m+1} - \dots - a_{m+i-1}) B_i \right\}.$$

Se $\sum_1^m a_i = \sum_{m+1}^{2m} a_i \neq 0$ è

$$A_1 + A_2 + \dots + A_{2m} = - \tag{6}$$

$$- 2(C_1 + C_2 + \dots + C_m) \sum_2^m{}_i (a_1 + \dots + a_{i-1} - a_{m+1} - \dots - a_{m+i-1}) B_i .$$

Viceversa se vale la (6) ed è $\sum_1^{2m} a_i \neq 0$, è pure o $\sum_1^m a_i = \sum_{m+1}^{2m} a_i$, o $\sum_1^m{}_i B_i = 0$.

7. Supponiamo che gli elementi a_i di C costituiscano una progressione geometrica di ragione q.

Siccome in questo caso $\varphi(\alpha_i) = \dfrac{a_1(1 - q^n)}{1 - q^{\alpha_i}}$ sarà

$$C = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_1^n (1 - q^n)^{\kappa - 1}$$

e per la (2')

$$\frac{n A_r}{C} = \sum_1^n{}_i \frac{\alpha_i^{r-1}(1 - q\alpha_i)}{a_1(1 - q^n)} = \frac{1}{a_1(1 - q^n)} \left\{ \sum_1^n{}_i \alpha_i^{r-1} - q \sum_1^n{}_i \alpha_i^r \right\}.$$

Ne segue

$$A_1 = \frac{C}{a_1(1-q^n)}; \quad A_n = -qA_1$$

e tutti gli altri A_r sono nulli.

8. Vogliamo calcolare infine il valore dei due seguenti circolanti particolari:

$$M = \left| \binom{n-1}{0} \binom{n-1}{1} \cdots \binom{n-1}{n-1} \right|;$$

$$N = \left| \binom{n-1}{0}, \; -\binom{n-1}{1}, \ldots, \; \pm\binom{n-1}{n-1} \right|.$$

È

$$M = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n); \quad N = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_n)$$

dove $\alpha_i^n = 1$ e $\varphi(x) = (1+x)^{n-1}$, $\psi(x) = (1-x)^{n-1}$; perciò

$$M = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 2^{n-1} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$N = 0$ in ogni caso.