BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

GALLO GALLINA

Un teorema sul problema delle prove ripetute

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.4, p. 206–208.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_4_206_0>

Un teorema sul problema delle prove ripetute.

Nota di Gallo Gallina (a Pavia).

Sunto. - *Si dimostra che la probabilità che in* n *serie di* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *prove rispettive, un dato evento di probabilità elementare* p *si presenti complessivamente* α *volte, è uguale alla probabilità che lo stesso evento si presenti* α *volte in un'unica serie di* $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ *prove.*

Il prof. C. Lurquin, occupandosi in un suo recente lavoro [1] della questione di determinare la probabilità che in n serie di $m_1, m_2, \ldots, m_n$ prove un dato evento si presenti cumulativamente α volte, stabilisce, con un ragionamento piuttosto laborioso, che *la probabilità che in due serie di* m *prove ciascuna un dato evento* E *si presenti cumulativamente* α *volte è uguale alla probabilità che lo stesso evento si presenti* α *volte in una serie unica di* 2m *prove,* e aggiunge che « considerando un numero anche poco elevato di « serie di prove si va tosto ad urtare contro gravi difficoltà, tanto « da poter dire che vi è impossibilità pratica a risolvere il pro- « blema in modo assolutamente generale ».

In questa breve Nota farò invece vedere come la risoluzione completa della questione si possa ottenere in modo semplicissimo, dimostrando il seguente

Teorema: *La probabilità che in* n *serie di* $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *prove rispettive, un dato evento* E, *di probabilità elementare* p, *si presenti complessivamente* α *volte è uguale alla probabilità che lo stesso evento si presenti* α *volte in un'unica serie di* $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ *prove.*

(1) C. Lurquin, *Sur la probabilité cumulative,* « Mathesis », vol. XLVI, pag. 125, Paris, 1932.

Considero dapprima il caso in cui si abbiano due sole serie di m_1 e m_2 prove. La probabilità che in esse l'evento E si presenti complessivamente α volte è:

$$P(\alpha;\, m_1,\, m_2) = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{m_1}{k} p^k q^{m_1-k} \binom{m_2}{\alpha-k} p^{\alpha-k} q^{m_2-\alpha+k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{\alpha-k} p^{\alpha} q^{m_1+m_2-\alpha},$$

dove $q = 1 - p$. Ma d'altra parte è noto [1] che:

$$\sum_{k=0}^{\alpha} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{\alpha-k} = \binom{m_1+m_2}{\alpha};$$

quindi:

$$P(\alpha;\, m_1,\, m_2) = \binom{m_1+m_2}{\alpha} p^{\alpha} q^{m_1+m_2-\alpha} = P(\alpha;\, m_1+m_2),$$

cioè *la probabilità che in due serie di* m_1 *e* m_2 *prove l'evento* E *si presenti complessivamente* α *volte è uguale alla probabilità che lo stesso evento si presenti* α *volte in un'unica serie di* $m_1 + m_2$ *prove.*

Ciò premesso, applico il principio dell'induzione completa e faccio vedere che, supponendo il teorema da dimostrarsi vero per $n-1$ serie di $m_1,\, m_2,\ldots,\, m_{n-1}$ prove, cioè supponendo che si abbia:

(1) $$P(\alpha;\, m_1,\, m_2,\ldots,\, m_{n-1}) = P(\alpha;\, m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1}),$$

esso è necessariamente vero per n serie di $m_1,\, m_2,\ldots,\, m_n$ prove.

La probabilità infatti che nelle n serie di $m_1,\, m_2,\ldots,\, m_n$ prove l'evento E si presenti complessivamente α volte è:

$$P(\alpha;\, m_1,\, m_2,\ldots,\, m_n) = \sum_{k=0}^{\alpha} P(k;\, m_1,\, m_2,\ldots,\, m_{n-1}) \binom{m_n}{\alpha-k} p^{\alpha-k} q^{m_n-\alpha+k},$$

che, per la (1), si può scrivere:

$$P(\alpha;\, m_1,\, m_2,\ldots,\, m_n) = \sum_{k=0}^{\alpha} P(k;\, m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1}) \binom{m_n}{\alpha-k} p^{\alpha-k} q^{m_n-\alpha+k},$$

od anche:

$$P(\alpha;\, m_1,\, m_2,\ldots,\, m_n) = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}}{k}\binom{m_n}{\alpha-k} p^{\alpha} q^{m_1+m_2+\ldots+m_n-\alpha}.$$

Ma, come già si è osservato [1], è:

$$\sum_{k=0}^{\alpha} \binom{m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}}{k}\binom{m_n}{\alpha-k} = \binom{m_1+m_2+\ldots+m_n}{\alpha}.$$

[1] Cfr. S. Pincherle, *Lezioni di Algebra complementare*, vol. II, pag. 15, Bologna, 1909.

perciò:

$$P(\alpha;\, m_1, m_2, \ldots, m_n) = \binom{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{\alpha} p^{\alpha} q^{m_1 + m_2 + \ldots + m_n - \alpha} =$$
$$= P(\alpha;\, m_1 + m_2 + \ldots + m_n),$$

come appunto si voleva dimostrare.