Bollettino Unione Matematica Italiana

Paolo Cattaneo

Su un particolare covariante biquadratico delle forme binarie biquadratiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.4, p. 199–202.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_4_199_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1932.

PICCOLE NOTE

Su un particolare covariante biquadratico delle forme binarie biquadratiche.

Nota di Paolo Cattaneo (a Padova).

Sunto. - *Dati* n *punti di una retta, si considera il gruppo dei poli di ciascuno di essi rispetto agli altri* n — 1, *studiando in modo speciale il caso* n = 4.

1. Siano dati (su una retta) n punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$, rappresentati da una forma binaria f.

La coppia polare di ogni punto A_i è formata dal punto A_i stesso e da un punto B_i, che è il polo di A_i rispetto agli altri $n - 1$ punti dell'ennupla A.

Si ottiene così un'*ennupla* B, che si dirà *polare* dell'ennupla A e che è rappresentata da una forma φ, covariante della f, come essa di grado n e che si dirà *polare* della forma f.

Una tale trasformazione dei gruppi di punti è ben nota nel caso $n = 3$ ed allora è involutoria.

Ci proponiamo di dimostrare che, se $f = (a_1x_1 + a_2x_2)^n$, la φ è data dal risultante delle due forme $(a_1y_1 + a_2y_2)^n$ ed $(a_1{}^2x_1y_1 - a_2{}^2x_2y_2)(a_1y_1 + a_2y_2)^{n-2}$, considerate come funzioni di y_1 ed y_2.

Se $n = 4$, usando le notazioni classiche (Clebsch Lindemann, trad. francese, T. I, C. I, § 5), si ha $\varphi = 3i^2f - 16jH$; donde si deducono alcuni risultati non privi d'interesse e si vede che la trasformazione non è involutoria.

2. Poniamo, simbolicamente,

(1) $$s_x = a_1x_1 + a_2x_2 \qquad \text{ed} \qquad f = s_x{}^n.$$

Le due ennuple A e B sono rappresentate dal risultante delle due forme

(2) $$s_y{}^n$$

ed

(3) $$s_x{}^2 \cdot s_y{}^{n-2}.$$

Posto $x_1 : x_2 = (y_1 + h) : y_2$, la forma (3), moltiplicata per y_2 e divisa per x_2, diventa

$$(s_y + a_1 h)^2 \cdot s_y^{n-2},$$

ossia, essendo $s_y^n = 0$, diventa

$$(a_1^2 h^2 + 2a_1 s_y h) \cdot s_y^{n-2}.$$

Dividendo per $h = (x_1 y_2 - x_2 y_1) : x_2$, si viene a scartare l'ennupla A e si vede che il covariante polare φ è il risultante della forma (2) e della

$$[a_1^2(x_1 y_2 - x_2 y_1) + 2a_1 s_y x_2] \cdot s_y^{n-2} = [a_1^2 x_1 y_2 + a_1^2 x_2 y_1 + 2a_1 a_2 x_2 y_2] \cdot s_y^{n-2}.$$

Ma dalla $s_y^n = 0$ si ha

$$[a_1^2 y_1^2 + 2a_1 a_2 y_1 y_2] \cdot s_y^{n-2} = - a_2^2 y_2^2 \cdot s_y^{n-2} :$$

sicchè la forma precedente, moltiplicata per y_1, diventa

$$[a_1^2 x_1 y_1 y_2 - a_2^2 x_2 y_2^2] \cdot s_y^{n-2}.$$

Dividendo per y_2, si conclude che φ è il risultante della (2) e della

$$[a_1^2 x_1 y_1 - a_2^2 x_2 y_2] \cdot s_y^{n-2} \tag{4}$$ c. d. d.

3. Consideriamo, in particolare, il caso $n = 4$, ossia il caso di una *quaterna di punti*, che supporremo *distinti*.

La (4) diventa

$$a_1^4 x_1 y_1^3 + a_1^2 a_2 (2a_1 x_1 - a_2 x_2) y_1^2 y_2 - a_1 a_2^2 (2a_2 x_2 - a_1 x_1) y_1 y_2^2 - a_2^4 x_2 y_2^3. \tag{5}$$

Prendiamo la forma canonica

$$f = p(x_1^4 + x_2^4) + 6q x_1^2 x_2^2, \tag{6}$$

dove $p \neq 0$ ed $\neq \pm 3q$.

Il covariante φ è allora il risultante delle due forme

$$p(y_1^4 + y_2^4) + 6q y_1^2 y_2^2 \quad \text{e} \quad p x_1 y_1^3 - q x_2 y_1^2 y_2 + q x_1 y_1 y_2^2 - p x_2 y_2^3.$$

Dall'annullarsi della seconda si ha

$$\begin{cases} x_1 = \rho y_2 (p y_2^2 + q y_1^2) \\ x_2 = \rho y_1 (p y_1^2 + q y_2^2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^2 = \rho^2 y_1^2 y_2^2 [(q^2 - p^2) y_1^2 - 4pq y_2^2] \\ x_2^2 = \rho^2 y_1^2 y_2^2 [(q^2 - p^2) y_2^2 - 4pq y_1^2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^4 + x_2^4 = \rho^4 y_1^4 y_2^4 [(p^4 + 14p^2 q^2 + q^4)(y_1^4 + y_2^4) + 16pq(p^2 - q^2) y_1^2 y_2^2] \\ x_1^2 x_2^2 = \rho^4 y_1^4 y_2^4 [(p^4 + 14p^2 q^2 + q^4) y_1^2 y_2^2 + 4pq(p^2 - q^2)(y_1^4 + y_2^4)]. \end{cases}$$

Annullandosi anche la prima forma, si ha

$$\begin{cases} x_1^4 + x_2^4 = \frac{1}{p}\rho^4 y_1^6 y_2^6 \cdot 2q(5p^4 - 50p^2q^2 - 3q^4) \\ x_1^2 x_2^2 = \rho^4 y_1^6 y_2^6 \cdot (p^2 - 5q^2)^2 \end{cases}$$

e di quì si ha infine

$$\varphi = p(p^2 - 5q^2)^2(x_1^4 + x_2^4) - 2q(5p^4 - 50p^2q^2 - 3q^4)x_1^2x_2^2. \tag{7}$$

4. È facile ora esprimere φ covariantemente in funzione degli invarianti

$$i = 2(p^2 + 3q^2), \qquad j = 6q(p^2 - q^2)$$

e dell'hessiano

$$H = 2pq(x_1^4 + x_2^4) + 2(p^2 - 3q^2)x_1^2x_2^2 = 2qf + 2(p^2 - 9q^2)x_1^2x_2^2.$$

Dalla (7) si ha infatti

$$\begin{aligned} \varphi &= (p^2 - 5q^2)^2(f - 6qx_1^2x_2^2) - 2q(5p^4 - 50p^2q^2 - 3q^4)x_1^2x_2^2 = \\ &= (p^2 - 5q^2)^2 f - 16q(p^2 - q^2)(p^2 - 9q^2)x_1^2x_2^2 = \\ &= (p^2 - 5q^2)^2 f - 8q(p^2 - q^2)(H - 2qf) = \\ &= (p^2 + 3q^2)^2 f - 8q(p^2 - q^2)H. \end{aligned}$$

Moltiplicando per 12, si ha di qui

$$\varphi = 3i^2 f - 16jH; \tag{8}$$

donde, essendo 4, 6 e 2 i pesi di i, j ed H, si vede, non solo che la φ è così espressa sotto forma invariantiva, ma anche che il suo peso è 8.

5. Avendo supposto f priva di punti doppi, le quaterne f ed H non coincidono e dalla (8) si vede che la φ coincide con la f o con la H solo quando si ha, rispettivamente, $j = 0$ oppure $i = 0$, ossia quando la f è armonica o equianarmonica.

La φ coincide con la steineriana $S = 2jf - 3iH$ (formata dai punti che hanno un punto doppio nel primo gruppo polare della f) solo quando $3i^2 : 16j = 2j : 3i$, ossia quando l'invariante assoluto $I = i^3 : j^2$ è $32 : 9$.

Dalla (7) si ha tosto che la φ ha un punto doppio (anzi due) solo quando $p = \pm\sqrt{5}\cdot q$ e quando

$$p(p^2 - 5q^2)^2 = \pm q(5p^4 - 50p^2q^2 - 3q^4),$$

ossia

$$(p \pm 3q)(p^2 \mp 4pq - q^2)^2 = 0,$$

ossia

$$p = (\pm 2 \pm \sqrt{5})q.$$

Anche in questi sei casi particolari, posto

$$p' = p(p^2 - 5q^2)^2 \quad \text{e} \quad q' = q(5p^4 - 50p^2q^2 - 3q^4) : 3.$$

la polare della polare della f è data dalla

$$p'(p'^2 - 5q'^2)^2(x_1^4 + x_2^4) + 2q'(5p'^4 - 50p'^2q'^2 - 3q'^4)x_1^2x_2^2,$$

che, in generale, è distinta dalla f. La trasformazione polare delle quaterne è dunque non involutoria.

6. Se la quaterna f consta di *due punti doppi*, basta porre in quanto precede $p = 0$ e si vede tosto che le quattro quaterne f, φ, H ed S sono tutte coincidenti.

Esse sono invece tutte distinte nel caso di *un* solo *punto doppio*. Infatti possiamo porre allora $f = x_1x_2(x_1 - x_2)^2$; e si ha

$$\varphi = (2x_1 - 3x_2)(3x_1 - 2x_2)(x_1 - x_2)^2,$$
$$H = (3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2)(x_1 - x_2)^2,$$
$$S = (9x_1^2 - 14x_1x_2 + 9x_2^2)(x_1 - x_2)^2.$$

La *quaterna polare* φ *è indeterminata* se la f ha un *punto triplo* o uno *quadruplo*.

7. Ogni quaterna $h(x_1^4 + x_2^4) + 6kx_1^2x_2^2$ è polare di cinque quaterne $\lambda(x_1^4 + x_2^4) + 6\mu x_1^2x_2^2$, distinte o no: quelle definite dall'equazione

$$3k\lambda(\lambda^2 - 5\mu^2)^2 + h\mu(5\lambda^4 - 50\lambda^2\mu^2 - 3\mu^4) = 0.$$

La quaterna $x_1^2x_2^2$ è polare delle tre quaterne

$$x_1^2x_2^2 \quad \text{e} \quad \sqrt{5}(x_1^4 + x_2^4) \pm 6x_1^2x_2^2.$$

Dal n.° 6 scende ovviamente che la quaterna $x_1x_2(x_1 - x_2)^2$ è polare di una sola quaterna: la $(2x_1 + 3x_2)(3x_1 + 2x_2)(x_1 - x_2)^2$.