Vincenzo G. Cavallaro

Una raccolta di nuove formule approssimate rappresentanti il numero e, la costante d'Eulero, il numero π e derivati, lati di poligoni superiori, etc.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.3, p. 164–168.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_3_164_0>

Una raccolta di nuove formule approssimate rappresentanti il numero e, la costante d'Eulero, il numero π e derivati, lati di poligoni superiori, etc..

Nota di V. G. CAVALLARO (a Cefalù).

Sunto. - *L'A. esprime semplicemente, per seni d'angoli multipli di 3 gradi, quantità non costruibili elementarmente e raccoglie 152 formule, generalmente trinomi, suscettibili di facile determinazione grafica del numero e, della costante d'Eulero, del numero π e derivati, e di lati di poligoni superiori, etc., con errore inapprezzabile.*

In generale, la costruzione d'un arco multiplo di 3 gradi e però del seno corrispondente può sembrare a prima vista richiedere lunghe e complesse operazioni grafiche: invece è un procedimento facilissimo rapido e preciso abbastanza, specialmente quando al metodo ordinario di divisione aurea che generalmente interviene in quella costruzione, sostituiamo il noto metodo di MASCHERONI che adopera il solo compasso, e più è geometrografico ossia matematicamente più semplice d'ogni altro risolvente lo stesso problema.

Con tale indirizzo costruttivo più semplice e più elegante, l'arco di 3 gradi e ogni arco multiplo di 3 gradi su un quadrante assegnato si ottiene direttamente e indipendentemente dalla bisezione dell'angolo al centro insistente sull'arco doppio. Nel mio studio su l'approssimata determinazione dei primi 10 poligoni regolari fondamentali non costruibili elementarmente [1] sviluppai codesta costruzione, per la cui facilità nemmeno m'occorse un'esplicita figura d'illustrazione. E siccome essa è fondamentale per ogni formula che seguirà, io la riproduco qui per maggior comodità del lettore che a queste cose s'interessasse:

Il simbolo $O(OB)$ rappresenti il cerchio di centro O e raggio $OB = 1$. Descritta $B(BO)$ e detti C, C' i punti d'incontro con $O(OB)$, la corda CC' incontra il raggio OB in U ed è $OU = 1/2 = \sin 30°$, $CU = C'U = \sin 60°$. Senza cambiar raggio facciamo arco $CD =$ $=$ arco DA: è AB un diametro.

Se descriviamo $A(AC)$, $B(BD)$ e diciamo Z uno dei loro punti d'incontro, è OZ il lato del quadrato inscritto nel dato cerchio $O(OB)$. Quindi se col MASCHERONI descriviamo ancora $D(OZ)$, essa incontrerà il raggio OB nel punto aureo G e sarà

$$OG = \lambda = 2 \sin 18° = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0.6180339887...$$

[1] « Giornale di Matematiche di Battaglini », Napoli, 1928.

(mentre $BG = \lambda^2 = 1 - \lambda = 0.3819660113...$). Gli estremi M, M' del diametro perpendicolare ad AB s'ottengono intersecando $O(OB)$ con $B(OZ)$; e il punto medio P del quadrante BM descrivendo $Z(OB)$. La $M(MG)$ incontra in H il quadrante BM. Descritta $C(BH)$ diciamo V, L i punti d'incontro col quadrante stesso. Abbiamo:

$$\text{arco } BH = 18^\circ, \quad \text{a. } BP = 45^\circ, \quad \text{a. } BC = 60^\circ, \quad \text{a. } BM = 90^\circ,$$
$$\text{a. } CM = 30^\circ, \quad \text{a. } ML = 12^\circ, \quad \text{a. } CP = \text{a. } BC - \text{a. } BP = 60^\circ - 45^\circ = 16^\circ,$$
$$\text{a. } PV = \text{a. } CV - \text{a. } CP = 18^\circ - 15^\circ = 3^\circ,$$
$$\text{a. } BL = \text{a. } BC + \text{a. } CL = 60^\circ + 18^\circ = 78^\circ,$$
$$\text{a. } BV = \text{a. } BP - \text{a. } PV = 45^\circ - 3^\circ = 42^\circ.$$

Poi

$$\text{a. } 63^\circ = \text{a. } 45^\circ + \text{a. } 18^\circ, \quad \text{a. } 27^\circ = \text{a. } 45^\circ - \text{a. } 18^\circ$$
$$\text{a. } 33^\circ = \text{a. } 15^\circ + \text{a. } 18^\circ, \quad \text{a. } 72^\circ = \text{a. } 60^\circ + \text{a. } 12^\circ,$$
$$\text{a. } 75^\circ = \text{a. } 60^\circ + \text{a. } 15^\circ, \text{ ecc.}$$

Or siccome è immediata la determinazione sul quadrante BM' dei punti H', P', V', C',... simmetrici rispetto al raggio OB, dei punti H, P, V, C,... già costruiti sul quadrante BM, segue subito la costruibilità dei seni d'angoli multipli di 3 gradi (1).

Formule relative al numero e (2).

$$e \backsim \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 9 + \frac{3}{10}\right], \qquad \text{err.} < \frac{1}{769.230}$$

$$e \backsim \frac{2}{9}\left[\sin 69 + \sin 87 + 11 - \frac{7}{10}\right], \quad \text{err.} < \frac{1}{76.923}$$

$$e \backsim \frac{4}{9}\left[\sin 18 + \sin 45 + 5 + \frac{1}{10}\right], \quad \text{err.} < \frac{1}{212.765}$$

$$e \backsim \frac{9}{7}\left[\sqrt{2} + \frac{7}{10}\right], \qquad \text{err.} < \frac{1}{136.995}$$

$$e \backsim 4\left[\sin 60 + \sin 66 - \frac{11}{10}\right], \qquad \text{err.} < \frac{1}{588.222}$$

(1) Per la dimostrazione facilissima delle formule non occorre riportar qui, per necessaria brevità, i valori numerici che interessano, dato che trovansi in formulari, in tabelle numeriche, in libri posseduti dagli studiosi. (*Repertorio di Matem. elem.*, Giusti, Livorno; *Tavole numeriche*, Soc. Ed. Torinese; *Formulario di Matem.*, Hoepli, Milano, etc.).

(2) La redazione del « Bollettino » è dolente che esigenze tipografiche non le consentano di pubblicare che poche delle molte formule costruite con perizia e con rara diligenza dal ch.mo prof. CAVALLARO. Essa si augura che la raccolta completa di queste formule possa figurare in qualche pubblicazione di carattere più tecnico e maggiormente rivolto alle applicazioni.

(N. della Redazione).

Formule relative alla costante d'Eulero-Mascheroni.

$$C \backsimeq \frac{2}{7}\left[\sin 48 + \sin 51 + \frac{1}{2}\right], \quad \text{err.} < \frac{1}{90.909}$$

$$C \backsimeq \frac{2}{9}\left[\sin 15 + \sin 57 + \frac{3}{2}\right], \quad \text{err.} < \frac{1}{222.222}$$

$$C \backsimeq \frac{7}{6}\left[\sin 45 + \sin 81 - \frac{6}{5}\right], \quad \text{err.} < \frac{1}{21.739}$$

$$C \backsimeq \frac{8}{7}\left[\sin 27 + \sin 72 - \frac{9}{10}\right], \quad \text{err.} < \frac{1}{50.000}$$

$$C \backsimeq \frac{1}{4}[2 + \sin 18], \quad \text{err.} < \frac{1}{25.000}$$

$$C \backsimeq 3[\sin 15 + \sin 69 - 1], \quad \text{err.} < \frac{1}{55.555}$$

$$C \backsimeq \frac{7}{6}\left[\sin 45 + \sin 81 - \frac{6}{5}\right], \quad \text{err.} < \frac{1}{21.739}$$

$$C \backsimeq \frac{2}{7}\left[\sin 48 + \sin 51 + \frac{1}{2}\right], \quad \text{err.} < \frac{1}{90.909}$$

Formule relative a π e a $\frac{1}{\pi}$.

$$\pi \backsimeq \frac{2}{5}\left[\sin 27 + 7 + \frac{2}{5}\right], \quad \text{err.} < \frac{1}{277.777}$$

$$\pi \backsimeq \frac{1}{5}\left[\sin 12 + \frac{31}{2}\right], \quad \text{err.} < \frac{1}{90.909}$$

$$\pi \backsimeq \frac{1}{7}\left[\sin 63 + 21 + \frac{1}{10}\right], \quad \text{err.} < \frac{1}{47.268}$$

$$\frac{1}{\pi} \backsimeq 4\left[\sin 60 + \sin 66 - \frac{17}{10}\right], \quad \text{err.} < \frac{1}{37.037}$$

$$\frac{1}{\pi} \backsimeq 5[\sin 42 + \sin 84] - 8, \quad \text{err.} < \frac{1}{20.833}$$

$$\frac{1}{\pi} \backsimeq \frac{5}{6}\lambda^2, \quad \text{err.} < \frac{1}{200.000}$$

$$\frac{1}{\pi} \backsimeq \frac{2}{5}\left[\sin 33 + \sin 72 - \frac{7}{10}\right], \quad \text{err.} < \frac{1}{31.250}$$

Formule relative a $\sqrt{\pi}$.

$$\sqrt{\pi} \backsimeq \frac{1}{2}\left[\sin 27 + \sin 63 + \frac{11}{5}\right], \qquad \text{err.} < \frac{1}{22.222}$$

$$\sqrt{\pi} \backsimeq \frac{1}{4}\left[\sin 57 + \sin 72 + 6 - \frac{7}{10}\right], \qquad \text{err.} < \frac{1}{43.478}$$

$$\sqrt{\pi} \backsimeq \frac{1}{7}\left[12 + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{10}\right], \qquad \text{err.} < \frac{1}{90.909}$$

$$\sqrt{\pi} \backsimeq \frac{1}{8}\left[\sin 60 + \sin 66 + 13 - \frac{3}{5}\right], \qquad \text{err.} < \frac{1}{112.727}$$

$$\text{Se}\quad \left.\begin{aligned} M &= \frac{1}{4}\left[\sin 6 + \frac{1}{2}\sin 39 + 3\sin 72 + 6\right] \\ N &= 1 + \sin 45 + \sin 63 \\ P &= \frac{1}{4}\left[3\sin 36 + \frac{1}{2}\sin 57\right] + 3\sin 60 \end{aligned}\right\} \sqrt{\pi} \backsim M + N - P, \ \text{err.} < \frac{1}{28.571.428}.$$

Formule relative a numeri importanti derivati da π.

$$\text{Log}\,\pi \backsimeq \frac{7}{9}\lambda^2 + \frac{1}{5}, \qquad \text{err.} < \frac{1}{14.285}$$

$$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \backsim \frac{7}{8}\lambda + \frac{7}{10}, \qquad \text{err.} < \frac{1}{12.500}$$

$$\sqrt[3]{\pi} \backsimeq \sin 60 + \sin 87 - \frac{7}{5}, \qquad \text{err.} < \frac{1}{15.625}$$

$$\sqrt[5]{\pi} \backsimeq \sin 15 + \sin 87, \qquad \text{err.} < \frac{1}{5.555}$$

$$\text{Log}\,\pi \backsimeq \sin 27 + \sin 48 - \frac{7}{10}, \qquad \text{err.} < \frac{1}{66.666}$$

$$\pi\sqrt{\pi} \backsimeq \frac{7}{4}\lambda^2 + \frac{49}{10}, \qquad \text{err.} < \frac{1}{8.333}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\pi}} \backsimeq \frac{1}{2}\left[\sin 45 + \sin 69 - \frac{2}{5}\right], \qquad \text{err.} < \frac{1}{142.587}$$

Osservazione. — Poichè $\sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\pi}} = 0.6203504908.....$ è la misura del raggio della sfera equivalente al cubo di lato $=1$, l'ultima formula risolve, con molta approssimazione, il *problema della trasformazione sferica del cubo.*

Formule relative a lati di poligoni superiori.

Se con L_x indichiamo la misura del lato del poligono regolare superiore (ossia non costruibile elementarmente) di x lati inscritto nel cerchio di raggio unitario, abbiamo:

$$L_9 \backsimeq \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\lambda, \quad \text{err.} < \frac{1}{40.000} \qquad L_{41} \backsimeq \frac{4}{7}\lambda-\frac{1}{5}, \quad \text{err.} < \frac{1}{15.625}$$

$$L_{11} \backsimeq 2\lambda^2-\frac{1}{5}, \quad \text{err.} < \frac{1}{2.000} \qquad L_{43} \backsimeq 3\lambda^2-1, \quad \text{err.} < \frac{1}{9.090}$$

$$L_{23} \backsimeq \frac{9}{5}-4\lambda^2, \quad \text{err.} < \frac{1}{5.000} \qquad L_{53} \backsimeq \lambda-\frac{1}{2}, \quad \text{err.} < \frac{1}{2.222}$$

$$L_{27} \backsimeq \frac{3}{8}\lambda, \quad \text{err.} < \frac{1}{2.325} \qquad L_{73} \backsimeq \frac{3}{4}\lambda^2-\frac{1}{5}, \quad \text{err.} < \frac{1}{2.380}$$

$$L_{97} \backsimeq \sin 60 + \sin 87 - \frac{9}{5}, \quad \text{err.} < \frac{1}{9.090}$$

$$L_{100} \backsimeq \sin 39 + \sin 69 - \frac{3}{2}, \quad \text{err.} < \frac{1}{12.500}$$

Formule relative a casi di moltiplicazione del cubo.

$$\sqrt[3]{3} \backsimeq \frac{7}{3}\lambda, \quad \text{err.} < \frac{1}{5.555} \qquad \sqrt[3]{5} \backsimeq 5\lambda^2-\frac{1}{5}, \quad \text{err.} < \frac{1}{8.333}$$

Formule varie.

$$\sqrt{\pi} \backsimeq L_{27}+\frac{3}{2}, \quad \text{err.} < \frac{1}{7.142} \qquad L_{23} \backsimeq \frac{1}{5}+\frac{1}{8}C, \quad \text{err.} < \frac{1}{5.000}$$

$$\sqrt{\pi} \backsimeq \sqrt[3]{78}-\frac{5}{2}, \quad \text{err.} < \frac{1}{8.333} \qquad L_{97} \backsimeq \sqrt[3]{\pi}-\frac{7}{5}, \quad \text{err.} < \frac{1}{5.555}$$

$$\frac{1}{\pi} \backsimeq \frac{4}{9}\left[\frac{1}{2}+L_{29}\right], \quad \text{err.} < \frac{1}{50.000} \qquad \operatorname{Log} e \backsimeq \frac{7}{8}\lambda^2+\frac{1}{10}, \quad \text{err.} < \frac{1}{13.333} \text{ (1)}.$$

$$\sqrt[6]{\pi} \backsimeq \frac{5}{9}e-\frac{3}{10}, \quad \text{err.} < \frac{1}{20.000}$$

(1) Chi s'interessa a queste cose veda Note dell'A. in « Bollettino Un. Mat. It. », a. X, n. 5, 1931; « Rassegna di Mat. e Fisica », Roma, 1924; « Rivista di Fisica, Mat. e Sc. Natur. », Napoli, 1928; « Bollettino di Mat. e di Sc. Fisiche e Natur. », 1913-14; « Giornale di Matematiche di Battaglini », Napoli, 1928-29.