
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUDOVICO GEYMONAT

Un'osservazione sul Teorema di Picard per le funzioni analitiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana,
Serie 1, Vol. 11 (1932), n.3, p. 160–163.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_3_160_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Un'osservazione sul Teorema di Picard per le funzioni analitiche.

Nota di LUDOVICO GEYMONAT (a Torino).

Sunto. - Si dimostra che: detta $f(x)$ una funzione trascendente intera; $P(x)$, $Q(x)$ due polinomi o funzioni razionali in x , non identicamente eguali; se l'equazione $f(x) = P(x)$ non ammette radici, l'equazione $f(x) = Q(x)$ ammetterà infinite radici. Tale Teorema nel caso particolare di $P(x)$ e $Q(x)$ costanti si riduce al Teorema di PICARD per le funzioni intere.

Si deducono altre proprietà per le equazioni fra funzioni intere; e si generalizzano al caso di funzioni meromorfe.

1. È ben noto il Teorema di PICARD, secondo cui una funzione meromorfa $R(x)$, non ridotta ad una costante, nè ad una funzione razionale, deve assumere nel piano x ogni valore, salvo al più due, infinite volte; in particolare, una funzione intera, non ridotta ad una costante, può evitare nel piano x un solo valore.

Supponiamo:

1°) La funzione trascendente intera

$$z(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

eviti il valore zero.

2°) La $y(x)$ sia una funzione intera (trascendente o polinomio o costante); e non sia $y(x) : z(x) = \text{cost.}$; cosicchè la y , se per caso è costante, non potrà essere zero.

Consideriamo la funzione meromorfa, evidentemente non costante:

$$(1) \quad \frac{y(x)}{y(x) - kz(x)}, \quad (k = \text{cost.}; k \neq 0).$$

Essa evita il valore uno, dunque non è una funzione razionale; di conseguenza, per il Teorema citato, assume infinite volte

o il valore zero o il valore infinito. Da questa semplicissima osservazione si possono dedurre parecchi interessanti risultati, alcuni dei quali credo bene ricordare esplicitamente.

a) Ammessa la prima ipotesi, supponiamo che $y(x)$ sia un polinomio non identicamente nullo (la seconda ipotesi resta, in tal caso, senz'altro verificata): non essendo possibile che sia in infiniti punti $y(x) = 0$, sarà in infiniti punti $y(x) = kz(x)$.

In particolare: riguardando $z(x)$ come differenza di una trascendente intera $f(x)$ e di un polinomio $P(x)$, che può essere identicamente ridotto ad una costante qualsiasi, non escluso lo zero; posto $k = 1$ ed $y(x) = Q(x) - P(x)$, possiamo enunciare il risultato ottenuto in quest'altro modo:

« Se $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi, non identicamente eguali, e se $f(x)$ è una funzione trascendente intera; allora, se l'equazione

$$(2) \quad f(x) = P(x)$$

non ammette radici, certamente l'equazione

$$(3) \quad f(x) = Q(x)$$

ammetterà infinite radici ». Il Teorema di PICARD per le funzioni intere si può evidentemente interpretare come caso particolare di questo, quando si suppongano $P(x)$ e $Q(x)$ costanti.

b) Supponiamo che $y(x)$ sia una funzione trascendente intera che evita pur essa il valore zero, e siano verificate le ipotesi prima e seconda; allora sarà in infiniti punti $y(x) - kz(x) = 0$. In altre parole:

« Se $u(x)$, $v(x)$ sono due funzioni intere qualunque, non differenti per una costante additiva, l'equazione

$$(4) \quad e^{u(x)} - ke^{v(x)} = 0 \quad (k = \text{cost.}; k \neq 0)$$

ammette infinite radici ».

c) Si deduce pure in modo immediato:

« Se due funzioni intere $y(x)$ e $z(x)$, delle quali l'una non è combinazione lineare dell'altra, evitano entrambe un medesimo valore α , allora la funzione:

$$(5) \quad y(x) + kz(x)$$

ove k è una costante diversa da zero, prende in infiniti punti del piano x il valore

$$\alpha + k\alpha.$$

2. I risultati precedenti possono subire alcune facili ma pur interessanti generalizzazioni; ne daremo qualche esempio.

2) Detti $P(x)$, $Q(x)$, $M(x)$, $N(x)$, quattro polinomi in x , consideriamo la funzione [analoga alla (1) precedente]:

$$(1') \quad \frac{y(x)}{y(x) - z(x)},$$

ove $y(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{M(x)}{N(x)}$ non sia identicamente nulla, e

$$z(x) = f(x) - \frac{M(x)}{N(x)}.$$

eviti lo zero, cosicchè l'equazione

$$f(x) = \frac{M(x)}{N(x)},$$

non ammetta radici. Allora, se la $f(x)$ è una trascendente intera, la (1') non può essere una costante: e, perchè la funzione

$$\frac{P(x)N(x) - M(x)Q(x)}{N(x)}$$

assume soltanto in un numero finito di punti il valore zero, ed in un numero finito di punti il valore infinito, si avrà che la (1'), la quale si può scrivere:

$$(1'') \quad \frac{P(x)N(x) - M(x)Q(x)}{N(x)} \cdot \frac{1}{P(x) - Q(x)f(x)}$$

deve assumere in infiniti punti il valore infinito. Possiamo cioè concludere alla seguente proposizione:

* Se $f(x)$ è una funzione trascendente intera; se

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \frac{M(x)}{N(x)},$$

sono due funzioni razionali in x , non identiche l'una all'altra, se infine l'equazione

$$(2') \quad f(x) = \frac{M(x)}{Q(x)},$$

non ammette radici, allora certamente avrà infinite radici l'equazione:

$$(3') \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

3) Nella proposizione b) del numero precedente è sostanzialmente contenuto, come facilmente si vede, il risultato:

• Se $f(x)$, $g(x)$, $l(x)$ sono trascendenti intere, e se $g(x)$ non è una combinazione lineare di $f(x)$ ed $l(x)$, allora, se le due equazioni:

$$(6) \quad f(x) - g(x) = 0, \quad l(x) - g(x) = 0$$

non hanno radici, certamente l'equazione

$$(7) \quad f(x) = l(x)$$

ha infinite radici ».

Questo risultato può venire esteso alle funzioni meromorfe nel seguente modo:

• Se $f(x)$, $g(x)$, $l(x)$ sono tre funzioni meromorfe, che evitano tutte tre un medesimo valore α ; e nessuna combinazione lineare fratta di $f(x)$ e $g(x)$ è identicamente eguale ad una combinazione lineare fratta di $l(x)$ e $g(x)$; allora, se in nessun punto è:

$$(6') \quad f(x) - g(x) = 0, \quad l(x) - g(x) = 0$$

certamente l'equazione:

$$(7') \quad f(x) = l(x)$$

ammette infinite radici ».

Escluso il caso in cui sia identicamente $f(x) = l(x)$, si può dimostrare che la funzione

$$H(x) = \frac{\frac{1}{g(x) - \alpha} - \frac{1}{f(x) - \alpha}}{\frac{1}{g(x) - \alpha} - \frac{1}{l(x) - \alpha}} = \frac{\frac{f(x) - g(x)}{(g(x) - \alpha)(f(x) - \alpha)}}{\frac{l(x) - g(x)}{(g(x) - \alpha)(l(x) - \alpha)}}$$

non è una costante. Infatti, se fosse identicamente

$$H(x) = k$$

potremmo scrivere:

$$(1 - k) \frac{1}{g(x) - \alpha} = \frac{1}{f(x) - \alpha} - k \frac{1}{l(x) - \alpha}$$

cioè:

$$\frac{(1 - k)(f(x) - \alpha) - (g(x) - \alpha)}{f(x) - \alpha} = -k \frac{g(x) - \alpha}{f(x) - \alpha}$$

contro l'ipotesi che non sia una combinazione lineare fratta di $f(x)$ e $g(x)$ identicamente eguale ad una combinazione lineare fratta di $l(x)$ e $g(x)$.

Ma $H(x)$ evita i valori zero ed infinito; dunque in infiniti punti prenderà il valore 1, cioè in infiniti punti sarà soddisfatta l'equazione

$$f(x) = l(x).$$