Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giulio Supino

Le equazioni ai limiti nella teoria delle lastre sottili

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.3, p. 154–160.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_3_154_0>

Le equazioni ai limiti nella teoria delle lastre sottili.

Nota di GIULIO SUPINO (a Bologna).

Sunto. - *L'A. studia le equazioni ai limiti nelle lastre sottili, correggendo alcune dimostrazioni e indicandone i limiti di validità. Il risultato è collegato con la teoria delle travi e la teoria delle lastre grosse.*

1. È noto che mentre l'equazione alle derivate parziali del 4° ordine

$$\Delta\Delta w = f(x, y) \qquad \left[\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]$$

relativa all'equilibrio delle lastre elastiche sottili risale a LAGRANGE e a POISSON, le condizioni ai limiti sono state poste in modo corretto soltanto dal KIRCHOFF (1850) [1] deducendole per mezzo del suo principio di variazione.

Nel « Treatise on natural Phylosophy » di THOMSON e TAIT (1867) [2] e, indipendentemente da questi AA., in una Memoria poco posteriore (1871) del BOUSSINESQ [3] il risultato del KIRCHOFF

[1] Cfr. KIRCHOFF, *Ueber das Gleichgewicht un die Bewegung einer elastischer Scheibe.* « Journal für die reine und angewandte Math. (Crelle) », Bd. 40, pagg. 51-88.

[2] THOMSON and TAIT, « Treatise en Natural Phylosophy », vol. I, parte II, n. 63.

[3] BOUSSINESQ, « Journal de Math. pures et appliquées », 1871, S. 2a, T. 16.

è spiegato con un ragionamento intuitivo, che però, come vedremo, non è sempre esatto. Poichè gli AA. posteriori si riferiscono tutti, senza modificazioni sostanziali, a queste ultime spiegazioni, così ritengo opportuno illustrare in questa Nota il significato delle condizioni ai limiti fissate dal KIRCHOFF. Il risultato mi permetterà di collegare la teoria delle lastre sottili con la teoria delle travi.

2. Assumiamo come piano x, y il piano medio della lastra prima della deformazione e sia w lo spostamento verticale di un punto generico di questo piano a deformazione avvenuta. Su ogni generatrice del contorno considereremo i momenti M_v e M_t che hanno per asse la normale v al contorno c della lastra in corrispondenza del suo piano medio e la tangente t allo stesso contorno. A questi si dovrà aggiungere P_z (forza agente secondo z). Questi dati sono esuberanti per determinare la sollecitazione. Il KIRCHOFF ha ottenute *due* sole condizioni ai limiti che equivalgono ad assegnare sul contorno

$$M_t \quad \text{e} \quad P_z + \frac{dM_v}{ds};$$

con questa ultima condizione si viene ad affermare che una distribuzione di momenti M_v può essere sostituita da una conveniente distribuzione di forze normali P_z e *viceversa*: precisamente sono equivalenti *nello studio delle lastre sottili* due distribuzioni P_z e M_v quando sia

$$P_z = \frac{dM_v}{ds}. \tag{2}$$

La (2) è implicita nel lavoro di KIRCHOFF che, per mezzo del suo principio di variazione giunge *soltanto* alle condizioni per M_t e $P_z + \dfrac{dM_v}{ds}$; altri AA., ritenendo troppo faticoso il procedimento di KIRCHOFF si preoccupano di dimostrare la (2) o almeno di giustificarla intuitivamente ([1]). In generale tutti si riferiscono alla spiegazione del THOMSON e TAIT coincidente con quella del BOUSSINESQ. Questi AA. osservano che il momento provocato dalle forze m_1 e m_2 (cioè $M_v \Delta s$) (v. fig. 1) può essere sostituito con quello provocato dalle due forze uguali ed opposte, distanti tra loro Δs e

([1]) Si veda p. es. oltre il trattato di THOMSON e TAIT già citato: A. E. H. LOVE, *The Math. Theory of Elasticity*, art. 297, 3ª ed., 1920; A. NADAI, *Elastische Platten*, Berlino, 1925; P. BURGATTI, *Teoria matematica della elasticità*, Bologna, 1931, ecc..

di intensità ΔM_v, dimodochè risulta $P_z = \frac{dM_v}{ds}$; l'influenza delle azioni tangenziali (normali al piano medio della lastra) si elimina a poca distanza dal contorno.

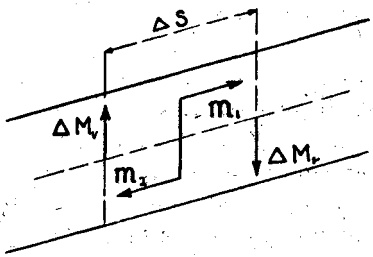

Fig. 1

Ma quest'ultimo fatto non si verifica sempre; cioè non sempre due forze P_z uguali ed opposte sono sufficientemente vicine da poter applicare il principio del DE SAINT VENANT.

3. Si consideri infatti una lastra rettangolare incastrata da un lato e soggetta sul lato opposto a forze normali al suo piano medio e distribuite uniformemente con intensità p per unità di lunghezza del contorno (v. fig. 2-a). Posto $p = \frac{d\varphi}{ds}$ e assunta l'origine del contorno nel punto A (v. fig. 2-b), (la scelta è evidentemente opportuna per ragioni di simmetria) la φ può essere rappresentata (scegliendo convenientemente le scala) dalla linea a tratto e punto della figura: la distribuzione data di forze può dunque essere sostituita con la distribuzione di momenti M_v rappresentata dalla φ ora descritta o con una distribuzione intermedia di forze e di momenti [1]. Ma ora seghiamo la lastra con un piano α perpendico-

[1] La soluzione elastica *effettiva* (*unica* nel campo delle lastre sottili) è appunto una distribuzione intermedia tra le due. Assunti gli assi come in fig. 2-b e indicando con w lo spostamento verticale si trova

$$w = -\frac{pM^2}{N(m-1)^2}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{pm}{2N(m-1)^2}y^2(l-x) \qquad \left[N = \frac{2Em^2h^3}{3(m^2-1)}\right]$$

essendo $2h$ lo spessore della lastra, m il coefficiente di POISSON, E il modulo di elasticità. Con le notazioni del LOVE si ha poi

$$G_1 = -\frac{pM^2}{(m-1)^2}(l-x) + \frac{p}{(m-1)^2}(l-x); \quad G_2 = 0; \quad H_1 = \frac{p}{m-1}y;$$

$$N_1 = -\frac{pm}{m-1}; \quad N_2 = 0.$$

lare al piano medio della lastra (v. fig. 2-a): se si ha la distribuzione $p = P_2$ fissata nel primo caso, allora su α si hanno tensioni tangenziali la cui risultante vale $T = \int p ds$; se invece si ha la

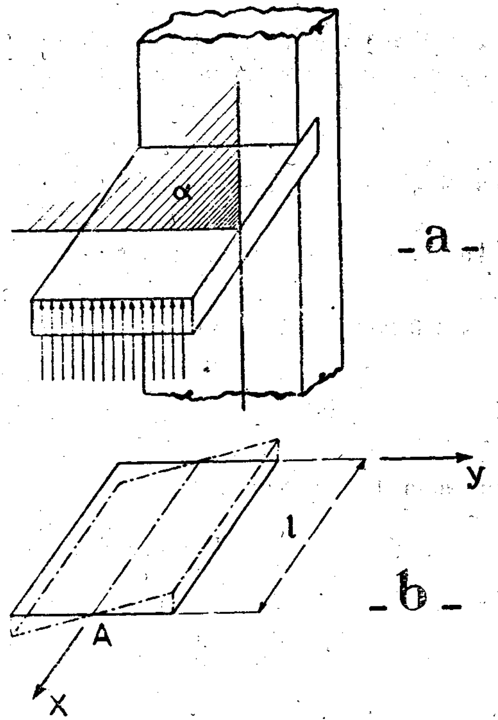

Fig. 2

distribuzione di soli momenti allora è $T = 0$. *Dunque per quanto riguarda le tensioni tangenziali le due distribuzioni di forze esterne non sono affatto equivalenti.*

4. Ma se si riprende in esame la teoria della deformazione delle lastre sottili (e cioè il modo di dedurre la (1)) si osserva subito che in essa non si tiene conto in nessun modo della deformazione dovuta alle tensioni tangenziali [1]. In conseguenza *agli effetti della deformazione di una lastra,* la (2) conserva la sua validità (in accordo con le ricerche del Kirchoff): dal punto di vista della *sollecitazione* sono (approssimativamente) valide soltanto le

[1] V. p. es. Nadai, op. cit..

espressioni dei momenti, come risulta dal fatto che la sostituzione di P_z con $\frac{dM_v}{ds}$ non modifica i momenti stessi.

Entro questi limiti la (2) può allora dimostrarsi correttamente nel modo seguente dovuto al LOVE [1].

Si consideri una distribuzione P_z diversa da zero e si valutino i momenti da essa prodotti integrando a tutto il contorno s le espressioni

$$-yP_z, \quad +xP_z.$$

Dalla prima di queste si trova

$$-\int yP_z ds = -y\int P_z ds + \int\left\{\int\limits^{s} P_z ds \cdot \frac{dy}{ds}\right\} ds$$

ed essendo $\int P_z ds = 0$ (per l'equilibrio) si può porre

$$\int_0^s P_z ds = \varphi(s)$$

con $\varphi(s)$ funzione monodroma. Ne segue

$$-\int yP_z ds = \int \varphi \frac{dy}{ds} = \int \varphi \cos(x, v) ds$$

e analogamente

$$\int xP_z ds = -\int \varphi \frac{dx}{ds} ds = \int \varphi \cos(y, v) ds.$$

Ora $\int \varphi \cos(x, v) ds$, $\int \varphi \cos(y, v) ds$ rappresentano anche le componenti secondo gli assi del momento risultante dovuto ad una distribuzione $M_v = \varphi$; ed essendo $\frac{d\varphi}{ds} = P_z$ resta dimostrata la (2) *per quanto riguarda i momenti* agenti su ogni generatrice del contorno.

5. La (2) richiama alla mente una proposizione notissima della teoria delle travi. Si afferma infatti nello studio di queste che, supposta la trave soggetta a forze ripartite « la derivata del momento flettente $\mathfrak{M}$ in un dato punto dell'asse è uguale allo sforzo

(1) LOVE, op. cit., art. 297. Non si può applicare il ragionamento intuitivo del THOMSON perchè, come risulta dall'esempio del n.° 3, esso non ha carattere generale.

di taglio T in quel punto; la derivata dello sforzo di taglio è uguale al carico » [1].

In simboli

$$P_z = \frac{dT}{ds} = \frac{d^2\mathfrak{M}}{ds^2}. \tag{3}$$

Occorre far vedere come queste formule non contraddicono alla (2) perchè la trave può essere pensata come una lastra rettangolare di piccola larghezza. Consideriamo perciò due sezioni vicine della trave che indichiamo con 1 e 2. Il momento $M_v \Delta s$ applicato alle generatrici comprese tra le due sezioni vale la differenza dei momenti $\mathfrak{M}_1$ e $\mathfrak{M}_2$ agenti su di esse:

$$\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1 = M_v \Delta s.$$

Ne segue, passando al limite per Δs tendente a zero:

$$M_v = \frac{d\mathfrak{M}}{ds}$$

e quindi M_v risulta paragonabile con uno sforzo di taglio. Associando questo alla (2) si ha poi

$$P_z = \frac{d^2\mathfrak{M}}{ds^2}$$

come deve essere. Si intende che il momento $\mathfrak{M}$ deve essere provocato da soli carichi verticali perchè siano valide le (3); se sull'asse della trave fosse applicato un momento M_v (per mezzo delle forze m_1 e m_2 della fig. 1) le formule (e le relative proposizioni) non sarebbero più vere. Ma *agli effetti del calcolo della deformazione* la sostituzione può essere fatta tutte le volte che si trascurino *le deformazioni prodotte dal taglio.*

6. La teoria delle lastre sottili prescinde dunque dalle deformazioni dovute al taglio. La teoria delle lastre grosse invece tiene conto di tutte le cause della deformazione sicchè a parità di condizioni ai limiti la deformazione sarà, in generale, diversa nelle due teorie. Ciò si può verificare nel modo indicato in una mia Nota recente [2] osservando che da una soluzione nota nella lastra

(1) Si veda p. es. GUIDI, *Lezioni sulla scienza delle costruzioni*, parte 2ª, § 53 (pag. 68 della 8ª ed.). Si afferma più spesso che la derivata del taglio è uguale al *carico cambiato di segno*, ma questo dipende dalla scelta delle coordinate, che per il taglio sono positive se dirette verso l'alto, per il carico positive se dirette verso il basso.

(2) Cfr. SUPINO, *Sulla deformazione delle lastre*. « Rend. R. Accademia Lincei », 1° semestre 1932.

sottile si può dedurre sempre una soluzione nella lastra grossa che ha su ogni generatrice le stesse caratteristiche di sollecitazione ma deformazione diversa. Nella stessa Nota ho anche mostrato che la data deformazione della lastra sottile può essere assunta come valida per la deformazione del piano medio della lastra grossa; la sollecitazione che ne risulta in questa è però diversa da quella d'origine. Si potrebbe facilmente dimostrare che le due soluzioni tendono a coincidere quando lo spessore della lastra tende a zero.