Valerio Novac

Sul calcolo di una funzione analitica di cui è conosciuta la parte reale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.3, p. 142–147.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_3_142_1>

Sul calcolo di una funzione analitica di cui è conosciuta la parte reale.

Nota di VALERIO NOVAC (Cluj - Romania).

Nella presente nota vogliamo presentare un procedimento rimarchevole per la sua semplicità, perchè nel risolvere il seguente problema della teoria delle funzioni, esclude qualsiasi integrazione.

Notando con

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \tag{1}$$

una funzione di variabile complessa $z = x + iy$, allora

$$\bar{f}(\bar{z}) = P(x, y) - iQ(x, y) \tag{1'}$$

dove $\bar{f}(z)$ vuol dire che nell'espressione di $f(z)$ mettiamo $-i$ invece di i, mentre $\bar{f}(\bar{z})$ si ottiene da $f(z)$ cambiando nell'espressione di z il segno dell'i e trasformando poi la $f(\bar{z})$ secondo la regola sopra accennata: generalmente le due espressioni non sono identiche.

1. Si trovi la funzione $f(z)$ nel caso in cui è data la sua parte reale $P(x, y)$. (Si tratta qui del caso pratico quando è data l'espressione analitica di $P(x, y)$).

Si adoperiamo il cambiamento delle variabili

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \tag{2}$$

dove considereremo formalmente z e $\bar{z}$ come variabili indipendenti, la risoluzione del sopradetto problema si ricava dal seguente teorema dovuto al sig. R. ALEZAIS [1].

Se

$$P(x, y) = \psi(z, \bar{z}) \tag{3}$$

e se α è una costante tale che la funzione $\psi(z, \alpha)$ non sia infinita, si ha

$$f(z) = 2\psi(z, \alpha) + c \tag{4}$$

dove c è una costante arbitraria.

La dimostrazione data dal sig. ALEZAIS può essere semplificata, tenendo conto delle suggestioni del sig. prof. TH. ANGHELUTZA.

Infatti, sommando le (1) e (1') si ha

$$P(x, y) = \frac{f(z) + \bar{f}(\bar{z})}{2}$$

quindi considerando la (3), la quale si può ottenere sempre mediante la trasformazione (2), risulta

$$f(z) = 2\psi(z, \bar{z}) - \bar{f}(\bar{z}). \tag{5}$$

Resta da dimostrare che il secondo membro della (5) non dipende da $\bar{z}$ e quindi che la relazione (4) è vera.

La separazione (5) essendo unica e la forma della funzione $\psi(z, \bar{z})$ speciale, a causa di P, il fatto è evidente, ma ciò si può dimostrare anche più rigorosamente.

Notiamo, a tale fine,

$$F(z, \bar{z}) = 2\psi(z, \bar{z}) - \bar{f}(\bar{z}) \tag{6}$$

dove

$$\psi(z, \bar{z}) = P\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right)$$

e dimostriamo che nell'espressione di $F(z, \bar{z})$, dopo avor fatte tutte le semplificazioni necessarie, $\bar{z}$ non comparisce più.

Osserviamo che, quando una funzione $F(z, \bar{z})$ contiene effettivamente $\bar{z}$, la sua derivata rispetto a z dipende dalla direzione di derivazione, cioè dall'argomento-limite dell'incremento $dz = dr \cdot e^{i\varphi}$.

[1] « Nouvelles Annales », 1907, pag. 337.

Infatti si ha

$$\frac{d}{dz} F(z, \bar{z}) = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{\partial F}{\partial z} + e^{-2i\varphi} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}.$$

Ma secondo l'equazione (5) abbiamo:

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{d}{dz} F(z, \bar{z})$$

quindi

$$f'(z) = \frac{\partial F}{\partial z} + e^{-2i\varphi} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$$

da dove segue che, il primo membro essendo indipendente da φ, si ha

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$$

cioè $F(z, \bar{z})$ non contiene se non apparentemente il $\bar{z}$. Possiamo quindi sostituire $\bar{z}$ mediante una costante α, senza che la (5) finisca di essere esatta.

Osservazione. $P(x, y)$ essendo completamente determinata, nella relazione (5) solo la parte imaginaria della costante c resta arbitraria; la sua parte reale può essere determinata facilmente assegnando alle variabili x, y un sistema di valori particolari.

Quindi la costante arbitraria può essere notata con iA.

Esempio. Sia

$$P = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

allora

$$\psi(z, \bar{z}) = \frac{z + \bar{z}}{2} + 2 \frac{z + \bar{z}}{(z + \bar{z})^2 - (z - \bar{z})^2}$$

$$\psi(z, 1) = \frac{z + 1}{2} + 2 \frac{z + 1}{(z + 1)^2 - (z - 1)^2}$$

$$= \frac{z}{2} + \frac{1}{2z} + 1.$$

Osserviamo che $P(1, 0) = 2$, $2\psi(1, 1) = 3$, quindi la parte reale della costante è -1, e

$$f(z) = z + \frac{1}{z} + iA.$$

2. Nel caso più generale, sia $A(u, v)$ una funzione armonica di u e v, e supponiamo che ci sia dato

$$A[P(x, y), Q(x, y)] = H(x, y) \tag{7}$$

per determinare la $f(z)$.

Ora sia $g(w)$ una funzione di $w = u + iv$ avendo come parte reale $A(u, v)$.

Allora potremo determinare il $g(w)$ adoperando il procedimento anteriore. Si ha

$$g(w) = 2A(u, v) - \bar{g}(\bar{w}). \tag{8}$$

Sia $w = f(z)$, quindi $u = P(x, y)$, $v = Q(x, y)$;

$$\begin{aligned} g[f(z)] &= 2A[P(x, y), Q(x, y)] - \bar{g}[\bar{f}(\bar{z})] \\ &= 2H(x, y) - \bar{g}[\bar{f}(\bar{z})] \\ &= 2H\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) - \bar{g}[\bar{f}(\bar{z})]. \end{aligned}$$

Come sopra, il secondo membro non può dipendere da $\bar{z}$ se non in apparenza, quindi $\bar{z}$ può essere sostituito con una costante qualunque α, evitando solo i valori α per i quali codesto membro diventa indeterminato. Quindi si ha

$$g[f(z)] = 2H\left(\frac{z + \alpha}{2}, \frac{z - \alpha}{2i}\right) + k \tag{9}$$

la quale ci permette di ricavare $f(z)$ se possiamo risolvere questa equazione dando a k un valore conveniente.

L'espressione (7) ci permette menzionare alcuni casi particolari interessanti, particolarizzando la funzione $g(w)$:

1.° Il caso considerato dal sig. ALEZAIS, quando si cerca di determinare la funzione $f(z)$ sapendo che:

$$aP + bQ = H(x, y), \tag{10}$$

dove a e b sono costanti, si ottiene facilmente dal caso generale sopra accennato, mettendo

$$\begin{aligned} g(w) &= (a - ib)w \\ &= (au + bv) + i(av - bu). \end{aligned}$$

La soluzione quindi si avrà presto, tenendo conto della (9)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{H\left(\dfrac{z + \alpha}{2}, \dfrac{z - \alpha}{2i}\right)}{a - ib} + k_1 \\ &= 2\,\frac{\psi(z, \alpha)}{a - ib} + k_1; \end{aligned} \tag{11}$$

ESEMPIO. Sia
$$P - Q = \frac{\operatorname{Sen} 2x + \operatorname{Cos} 2x + e^{2y}}{2 \operatorname{Cos} 2x + e^{2y} + e^{2y}}$$
si ha
$$\psi(z, \bar{z}) = \frac{\operatorname{Cos}(z + \bar{z}) + \operatorname{Sen}(z + \bar{z}) + \operatorname{Cos}(z - \bar{z}) - i \operatorname{Sen}(z - \bar{z})}{2 [\operatorname{Cos}(z + \bar{z}) + \operatorname{Cos}(z - \bar{z})]}$$
$$\psi(z, 0) = \frac{2 \operatorname{Cos} z + \operatorname{Sen} z - i \operatorname{Sen} z}{4 \operatorname{Cos} z} = \frac{1}{2} + \frac{1 - i}{4} \operatorname{tg} z$$
cioè
$$f(z) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} z + c.$$

Ma giacchè per $z = 0$, $P - Q = \frac{1}{2}$ avremo $c = \frac{1}{2}$, quindi
$$f(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} z + 1) + (1 - i) A.$$

2.° Ugualmente nel caso in cui si ha

(12) $$P \cdot Q = H(x, y)$$

si ottiene la $f(z)$ mettendo
$$g(w) = \frac{w^2}{2i}.$$

La soluzione si ha subito dal (9)

(13) $$f(z) = \sqrt{4iH\left(\frac{z + \alpha}{2}, \frac{z - \alpha}{2i}\right) + k_2}$$
$$f(z) = \sqrt{4i\psi(z, \alpha) + k_2}.$$

ESEMPIO. Sia
$$P \cdot Q = \frac{1}{2} e^{2x} \operatorname{Sen} 2y.$$

Si ha
$$\psi(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} e^{z + \bar{z}} \operatorname{Sen} \frac{z - \bar{z}}{i} = \frac{1}{2} e^{z + \bar{z}} \frac{e^{z - \bar{z}} - e^{-(z - \bar{z})}}{2i}$$
$$= \frac{1}{4i} (e^{2z} - e^{2\bar{z}})$$
quindi
$$[f(z)]^2 = e^{2z} - e^{2\alpha} + k_2 = e^{2z} + c_1 + ic_2.$$

Poniamo allora
$$P^2 - Q^2 \equiv e^{2x} \operatorname{Cos} 2y + c_1$$
$$2P \cdot Q \equiv e^{2x} \operatorname{Sen} 2y + c_2$$
donde $c_2 = 0$.

Ed allora

$$f(z) = \sqrt{e^{2z} + c_1}$$

dove c_1 è reale.

Osservazione. Possiamo trovare un altro esempio nel caso in cui si ha

$$(12') \qquad P^2 - Q^2 = H(x, y)$$

cioè quando

$$g(w) = w^2.$$

Consideriamo per esempio

$$P^2 - Q^2 = \frac{1}{4} \operatorname{Cos} 2x(e^{2y} + e^{-2y})$$

dove

$$f(z) = \sqrt{\operatorname{Cos}^2 z - \frac{1}{2} + ic}.$$

3.° Nel caso in cui si ha

$$(14) \qquad P^2 + Q^2 = H(x, y)$$

poniamo

$$\operatorname{Log}(P^2 + Q^2) = \operatorname{Log} H(x, y) = G(x, y).$$

Poichè $\operatorname{Log}(u^2 + v^2)$ è una funzione di u e v, abbiamo un caso particolare della espressione (7):

$$\operatorname{Log}(P^2 + Q^2) = G(x, y)$$

quindi si ha

$$\operatorname{Log}(u^2 + v^2) = \operatorname{Log}\left[\left(\frac{w + \bar{w}}{2}\right)^2 + \left(\frac{w - \bar{w}}{2i}\right)^2\right] = \operatorname{Log} w \cdot \bar{w}$$
$$= \operatorname{Log} w + \operatorname{Log} \bar{w}$$

allora

$$g(w) = 2 \operatorname{Log} w + \operatorname{Log} \alpha$$

quindi tenendo conto della (9) si ottiene

$$g[f(z)] = 2 \operatorname{Log} f(z) + \operatorname{Log} \alpha = 2G\left[\frac{z + \beta}{2}, \frac{z - \beta}{2i}\right] + c$$

$$f(z) = k_3 e^{G\left[\frac{z+\beta}{2}, \frac{z-\beta}{2i}\right]} = k_3 H\left[\frac{z + \beta}{2}, \frac{z - \beta}{2i}\right].$$

Esempio. Sia

$$P^2 + Q^2 = (x^2 + y^2)$$

si ha

$$\psi(z, \bar{z}) = \left[\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2\right]^2 = (z, \bar{z})^2$$

$$\psi(z, 1) = z^2$$

$$f(z) = kz^2.$$