Giacomo Albanese

Corrispondenze algebriche fra i punti di due superficie algebriche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.3, p. 131–138.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_3_131_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1932.

Corrispondenze algebriche fra i punti di due superficie algebriche.

Nota di GIACOMO ALBANESE (a Pisa).

Sunto. - *Nella 1ª e 2ª parte sono esposte le linee generali di una costruzione sistematica della teoria delle corrispondenze* $T \equiv (\alpha, \beta)$ *fra i punti di due superficie. Si studia l'effetto che* T *produce sui sistemi di curve delle due superficie, sui loro integrali semplici di 1ª specie e sui loro cicli lineari e tridimensionali. Si definiscono i concetti di corrispondenza a valenza, il concetto di base e si estende un principio di corrispondenza dovuto allo* ZEUTHEN. *Nella 3ª parte si pongono le basi di una possibile teoria delle serie di gruppi di punti di una superficie mediante il concetto di serie di livello.*

La teoria delle corrispondenze fra i punti di due curve algebriche ha formato oggetto di studi molto profondi, da parte di insigni geometri, sia italiani che stranièri; tanto che oggi, essa ha raggiunto uno sviluppo veramente imponente.

In confronto, la teoria delle corrispondenze (α, β) tra i punti di due superficie algebriche è ancora molto povera; si può dire essere ai primi passi.

Si conoscono i risultati (ormai classici) sulle superficie che ammettono gruppi continui di *trasformazioni birazionali in sè*, i teoremi sulle loro *involuzioni*, alcuni risultati dell'ENRIQUES e del GODEAUX sulle involuzioni cicliche doppiamente infinite, ma sulle trasformazioni generali (α, β) fra i punti di due superficie (se si eccettuano due note dello ZEUTHEN sul principio di corrispondenza e un lavoro del SEVERI sui legami che intercedono fra alcuni caratteri invarianti delle due superficie) poco o nulla è stato fatto finora.

La ragione va ricercata in un duplice fatto: 1°) la mancanza di una qualunque teoria delle serie di gruppi di punti di una superficie; 2°) la mancanza sulle superficie del concetto di *corrispondenza a valenza* che com'è noto, nel caso delle curve, ha una parte veramente fondamentale. I due fatti sono naturalmente collegati l'uno all'altro, e formano oggetto di questo lavoro.

Quando sulle superficie si cerca d'introdurre il concetto di corrispondenza a valenza, e particolarmente quelle di corrispondenza a valenza zero, s'incontrano, almeno per ora, non lievi difficoltà. Si vedrà per esempio che lo stesso teorema « se una corrispondenza è a valenza zero in un senso, lo è anche in senso inverso » che nel caso delle curve è pressochè evidente, per le superficie è tutt'altro che facile!

In ogni modo credo di avere superato le difficoltà con successo e inizio con questo, la pubblicazione di alcuni lavori, per uno studio sistematico delle corrispondenze fra i punti di due superficie e delle serie di gruppi di punti che ad esse appartengono.

Ecco un sunto di questo primo lavoro. Esso è diviso in tre parti.

Nella prima parte, data una corrispondenza $T \equiv (\alpha, \beta)$ fra i punti di due superficie algebriche irriducibili F ed F', studio l'effetto che T ha sui sistemi continui di curve delle due superficie.

Detta q l'irregolarità di F, $\{A\}$ un suo sistema continuo, completo, composto d' ∞^q sistemi lineari distinti e Σ_r il più ampio sistema di curve di $\{A\}$, che per la T hanno come omologhe su F', curve di uno stesso sistema lineare, dimostro che i sistemi lineari di $\{A\}$ si distribuiscono in due congruenze che in fondo non dipendono dal sistema $\{A\}$ di partenza e si rispecchiano in due congruenze h e k d'indice uno, della varietà di PICARD, V_q, relativa ad F.

Se r è la dimensione dei sistemi lineari di Σ_r, h si compone di ∞^r varietà V_{q-r} e k di ∞^{q-r} varietà V_r. Dimostro che le V_{q-r} e le V_r sono varietà abeliane. Corrispondentemente F possiede due sistemi regolari (complementari) di integrali semplici di prima specie riducibili; il primo definito da $q-r$ integrali indipendenti, con $2(q-r)$ periodi ridotti:

$$(I) \qquad I_1, \; I_2, \ldots, \; I_{q-r},$$

provenienti dagli integrali di prima specie di una V_{q-r}; il secondo da r integrali indipendenti con $2r$ periodi:

$$(II) \qquad J_1, \; J_2, \ldots, \; J_r,$$

provenienti dagli integrali di una V_r.

Detti q' ed r' i numeri di F' e T^{-1}, analoghi a q ed r, si trova analogamente che la varietà di PICARD, $V'_{q'}$ di F', possiede due congruenze d'indice uno, di varietà abeliane $V'_{q'-r'}$, $V'_{r'}$ e corrispondentemente F', due sistemi d'integrali riducibili:

$$(III) \qquad I_1', \; I_2', \ldots, \; I'_{q'-r'},$$

$$(IV) \qquad J_1', \; J_2', \ldots, \; J_{r'},$$

analoghi ai sistemi (I) e (II).

Il teorema fondamentale consiste nel dimostrare che V_{q-r} e $V'_{q'-r'}$ sono in corrispondenza birazionale fra di loro, oppure ognuna di esse possiede una involuzione di punti, priva di coincidenze, rappresentabile coi punti di una stessa varietà abeliana W_{q-r}.

Ne seguirà che:

(V) $$q - r = q' - r',$$

che i sistemi (I) e (III) hanno lo stesso numero d'integrali indipendenti, in corrispondenza biunivoca fra di loro e che i periodi di due integrali corrispondenti I_k, $I'_{k'}$ sono combinazioni lineari a coefficienti razionali (indipendenti da k) gli uni degli altri.

Detta γ^2_β la serie dei gruppi di β punti di F', che per la T corrispondono ai punti di F, o come si dice, la serie (birazionalmente identica ad F) che T induce su F', e con γ^2_α la serie analoga (identica ad F') che T^{-1} induce su F, dimostro che *gli integrali* (II) *dànno somma costante su tutti i gruppi della* γ^2_α, *gli integrali* (IV) *dànno somma costante su tutti i gruppi della* γ^2_β *e che tanto su* F, *quanto su* F', *nessun altro integrale gode di tale proprietà.*

Queste proprietà accostano la teoria delle corrispondenze fra i punti di due superficie a quella analoga fra i punti di due curve.

Per analogia chiamo, $q - r$, rango o difetto di equivalenza di T e r l'indice di equivalenza.

Per la (V) si ha allora: *una corrispondenza* T *e la sua inversa hanno lo stesso rango.*

Interessanti sono i casi del rango massimo, $r = 0$, $r' = 0$, oppure $r = r' = 0$, ma ancora più importante è il caso delle trasformazioni T di rango nullo, $q - r = q' - r' = 0$.

Allora i sistemi (I) e (III) svaniscono e i sistemi (II) e (IV) si riducono ai sistemi totali degli integrali di F ed F'.

Le corrispondenze a rango nullo le chiamo anche *corrispondenze a valenza zero.*

Valgono le proprietà:

a) Se T *è una corrispondenza a valenza zero, tale è la sua inversa.*

b) Una corrispondenza a valenza zero, fa corrispondere a tutte le curve di un qualunque sistema continuo di F, *curve di* F' *appartenenti ad uno stesso sistema lineare e viceversa.*

c) Se T *è una corrispondenza a valenza zero, gli integrali di prima specie di* F' *dànno somma costante su tutti i gruppi della serie* γ^2_β *che* T *induce su* F' *e viceversa.*

Ciascuna delle proprietà *b)* e *c)* è *caratteristica* per le corrispondenze a valenza zero.

Dimostro poi che: *se* F *ed* F' *sono due distinte superficie a moduli generali, ogni corrispondenza* T *fra i loro punti, è necessariamente a valenza zero.*

Dalla *c)* ricavo che: data sopra una varietà algebrica V_k una serie regolare γ_α^d di gruppi G di α punti (rappresentabile, cioè, biunivocamente coi punti di una varietà V_d, d'irregolarità superficiale nulla) ogni integrale semplice di prima specie di V_k, dà somma costante (a meno di periodi) su tutti i gruppi G della serie.

La proprietà è stata dimostrata dal SEVERI nel caso che V_k sia una superficie ($k = 2$) e γ_α^d sia *una involuzione*. Nelle stesse ipotesi il SEVERI ha dimostrato la proprietà inversa « se sopra i gruppi di una *involuzione* γ_α^d di una superficie, tutti gli integrali dànno somma costante, γ_α^d è regolare ». Questa proprietà si estende anche al caso di una γ_α^d *non involutoria*, purchè γ_α^d sia completa e invada tutta la superficie, come dirò poi nella terza parte.

Nella seconda parte mi occupo più particolarmente delle corrispondenze T fra i punti di una stessa superficie, F ed F' coincidenti.

Allora è $q = q'$ e dalla V segue $r = r'$:

Una corrispondenza T *fra i punti di una superficie* F *e la sua inversa* T^{-1} *hanno lo stesso indice di equivalenza.* Ma stavolta si ha qualcosa di più, dal punto di vista qualitativo:

Se alle curve A *di un dato sistema continuo* S *di* F, *la* T *fa corrispondere curve* A′ *di uno stesso sistema lineare* $|A'|$, *la sua inversa* T^{-1}, *alle stesse curve* A, *fa corrispondere curve* A^{-1}, *di uno stesso sistema lineare* $|A^{-1}|$.

Superate le difficoltà relative all'introduzione del concetto di corrispondenza a valenza zero è facile introdurre il concetto di valenza (ordinaria) intera *positiva* o *negativa* e successivamente quello di *corrispondenze dipendenti.* Valgono teoremi analoghi a quelli delle curve e dimostro che: *la totalità delle corrispondenze di* F *ammette una base e che il numero base è minore od uguale di* $2q^2$. *La base esiste anche per corrispondenze fra due distinte superficie* F *ed* F′ *e il numero base è minore uguale del più piccolo dei due numeri* $2q^2$, $2q'^2$.

Dirò altra volta di un secondo modo di introdurre la base.

Una notevole applicazione dei nuovi concetti, ottengo, estendendo il principio di corrispondenza per le superficie, dovuto allo ZEUTHEN.

Sia F nello spazio ordinario, d'ordine n, a singolarità ordinarie e T una corrispondenza che associa ad ogni punto P di F, i punti ove una curva C_P, variabile con P, incontra F (oltre P).

Supposto che C_P abbia in P un punto k-uplo, e T abbia x punti uniti isolati, detti α e β gli indici di T; γ il numero delle coppie PP' di punti omologhi che si trovano su due sezioni piane L ed L' di F, diviso per n; I l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE della superficie, lo ZEUTHEN dimostra la relazione:

$$x = \alpha + \beta + \gamma - k(I + 1). \tag{VI}$$

Se T, oltre gli x punti uniti isolati, sopra detti, possiede una curva U di punti uniti, si ha invece:

$$x + y + z - y_a = \alpha + \beta + \gamma - k(I + 1), \tag{VII}$$

essendo y l'ordine di U, z l'ordine della rigata R delle tangenti ad F nei punti P di U, che sono limiti delle corde PP' che uniscono due punti omologhi P e P' venuti a coincidere nel punto P e y_a il numero dei punti ove U incontra la curva di contatto di F col cono ad essa circoscritto, da un punto generico dello spazio.

Faccio vedere che i casi trattati dallo ZEUTHEN, corrispondono a quelli di corrispondenze a valenza k positiva o nulla e poi dimostro che *nelle stesse ipotesi*, la (VI) e la (VII) *valgono anche nel caso di corrispondenze a valenza* k *negativa*.

La (VI) e la (VII) esprimono perciò il principio di corrispondenza per trasformazioni T a valenza qualunque. Non manco di fare alcune osservazioni sulla giusta applicazione della (VI) e (VII), sul loro carattere invariantivo e qualche applicazione a certe classi di corrispondenze a valenza meno uno.

Nella stessa seconda parte studio la trasformazione che T induce sugli integrali semplici di prima specie di F, estendendo il noto procedimento di HURWITZ.

In seguito a noti risultati del SEVERI su tali integrali (sistema di cicli primitivi, integrali e periodi normali ecc.), l'estensione non presenta difficoltà concettuali. Bisogna però tener conto di due fatti che nel caso delle curve non si presentano:

1°) i divisori elementari della forma quadratica principale legata agli integrali di F non sono tutti uguali all'unità (o per lo meno non si sa se siano o no uguali all'unità);

2°) la base minima per i cicli lineari di F si compone di un sistema primitivo di $2q$ cicli indipendenti, costruiti alla maniera del SEVERI e dei divisori dello zero (se F non è a torsione nulla).

Opportuni accorgimenti permettono di superare queste difficoltà.

Queste considerazioni mi portano a dimostrare che:

Sopra una superficie a moduli generali ogni corrispondenza T *è a valenza.*

Proprietà, certo non priva d'interesse e che mette in maggiore rilievo l'estensione delle formule (VI) e (VII) al caso generale di una valenza k qualunque.

Studio quindi la trasformazione che T opera sui cicli lineari e tridimensionali di F (o della sua riemanniana) e trovo il significato topologico del rango: $2(q-r)$ *è il numero dei cicli indipendenti che si trovano fra i trasformati di un qualunque sistema completo di* $2q$ *cicli indipendenti di* F, *e ciò, sia che si tratti di cicli lineari, sia che si tratti di cicli tridimensionali.*

In particolare si ha che: *le trasformazioni a valenza zero (e queste sole) trasformano ogni ciclo lineare o tridimensionale di* F *in un ciclo nullo.*

Queste proprietà valgono anche se T opera fra due superficie F ed F' distinte, e per la loro dimostrazione seguo due vie, una è basata sulla rappresentazione trascendente di T, l'altra è di carattere puramente algebrico. La seconda mette in migliore rilievo l'aspetto geometrico della questione e dal lato qualitativo conduce a risultati più precisi ed espressivi.

Mi valgo a questo scopo di due teoremi che non credo del tutto privi d'interesse.

Il primo è l'estensione alle superficie di un criterio di equivalenza lineare dovuto sulle curve a ROSATI e CHISINI; dimostro cioè:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè sopra una superficie F, *le curve* C *di un sistema continuo* S, *appartengono (totalmente) ad uno stesso sistema lineare, è che* S *sia a variazione topologica nulla,* nel senso che, facendo descrivere ad una curva C un qualunque cammino chiuso di S, il ciclo tridimensionale che corrispondentemente si genera sulla riemanniana di F, sia un ciclo nullo.

Ponendo il risultato in relazione colle ricerche del SEVERI sui criteri di equivalenza lineare fra le curve di una superficie e particolarmente con quello che Egli intitola « *il primo teorema d'Abel sulle superficie algebriche* », il nuovo criterio, come per le curve, si può intitolare il *teorema d'Abel topologico* sopra le superficie algebriche.

L'altro teorema dice:

Se F *è d'irregolarità* q *ed* $|A|$ *un suo sistema continuo, completo, composto d'* ∞^q *sistemi lineari distinti, è sempre possibile far muovere* A *in* $|A|$ *in maniera da descrivere un sistema completo di* $2q$ *cicli tridimensionali,* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{2q}$, *indipendenti; e se le curve di* $|A|$ *si distribuiscono in due congruenze rappresentabili coi punti di varietà abeliane* V_r, V_{q-r}, *si può far in modo che per es.:* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{2r}$, *siano generati da curve* A *corrispondenti a punti di* V_r *e gli altri,* $\Gamma_{2r+1}, \ldots, \Gamma_{2q}$ *siano generati da curve* A *corrispondenti a punti di* V_{q-r}.

Il teorema dà modo di legare i cicli tridimensionali (e quindi anche quelli lineari) di F ai sistemi di curve algebriche esistenti su di essa.

Molte delle proprietà esposte, nella prima e seconda parte, si estendono senza difficoltà alle varietà superiori.

In una terza parte del lavoro, ritorno sulla proprietà *c)* delle corrispondenze a valenza zero.

Da essa nasce spontanea l'idea di considerare sopra una superficie F (come naturale estensione del concetto di serie lineare sopra una curva) le serie G_α^r di tutti i gruppi di α punti di F, dove ogni integrale semplice di prima specie della superficie, dà somma costante (a meno, s'intende di periodi).

Chiamo ogni G_α^r serie di livello della superficie.

Se G_α^r è completa e invade tutta la superficie, dimostro che la varietà V_r che coi suoi punti rappresenta biunivocamente i gruppi di G_α^r, è algebrica e regolare, *esse sono perciò serie regolari della superficie.*

Valgono le proprietà:

Il concetto di serie di G_α^r è invariante attraverso trasformazioni birazionali.

Una serie regolare completa è individuata da uno qualunque dei suoi gruppi.

Chiamando equivalenti due gruppi A e B appartenenti ad una stessa G_α^r, e scrivendo $A \equiv B$ o $A - B \equiv 0$, per il calcolo di tali relazioni, valgono le solite proprietà: Se $A \equiv B$ e $B \equiv C$ è anche $A \equiv C$; se $A \equiv B$ e $C \equiv D$ è anche $A \pm C \equiv B \pm D$. Vale il teorema del resto.

Per la dimensione r di una G_α^r, vale una formula analoga a quella di RIEMANN-ROCH: $r = 2\alpha - q + i$.

Dimostro che condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie F possegga una $G_\alpha^{2\alpha}$ è che F sia regolare,

Le $G_\alpha^{2\alpha-1}$ esistono nelle sole superficie ellittiche di genere nullo ($p_g = 0$, $p_a = -1$). Se la superficie non è ellittica e non possiede un fascio irrazionale di curve di livello costante per tutti i suoi integrali di 1ª specie, la varietà V_q delle serie G_α^r, con α fisso e maggiore od uguale al massimo intero contenuto nella frazione $\frac{q+1}{2}$, coincide con la varietà di PICARD di F.

L'indice ν di una G_α^r, dipende dalla superficie, non varia, cioè, al variare di G_α^r in F.

In ordine ad un teorema di PICARD, ν dovrebbe essere maggiore di uno, salvo che per le superficie iperellittiche. In generale per le superficie viene perciò a mancare l'estensione diretta del teorema d'ABEL per le curve. Vale un teorema analogo al teorema d'inversione di JACOBI. L'indice ν è direttamente legato ad esso.

Il numero ν è un invariante assoluto, ma sarà un nuovo invariante? o si potrà esprimere in funzione di quelli noti?

Come ho già accennato, se la superficie possiede un fascio di curve di livello costante per tutti i suoi integrali, alcune delle proprietà precedenti vanno leggermente modificate.

In queste considerazioni presentano comportamento diverso i casi di q pari e q dispari.