Bollettino Unione Matematica Italiana

Giovanni Sansone

Sulla chiusura dei polinomi di Legendre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.3, p. 129–130.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_3_129_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1932.

PICCOLE NOTE

Sulla chiusura dei polinomi di Legendre.

Nota di G. SANSONE (a Firenze).

Sunto. - *L'A. con la diretta applicazione di un teorema di* VITALI *dimostra la chiusura dei polinomi di* LEGENDRE.

La chiusura dei polinomi di LEGENDRE,

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x, \quad P_r(x) = \frac{1}{2^r r!} \frac{d^r(x^2-1)^r}{dx^r} \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

si deduce generalmente dalla nota proprietà che la successione $\{x^n\}$ è chiusa in ogni intervallo finito (¹); noi vogliamo qui provare direttamente, con l'uso di un teorema del compianto prof. G. VITALI, la chiusura della successione $\left\{\sqrt{\frac{2r+1}{2}}\,P_r(x)\right\}$ nell'intervallo $(-1, 1)$ (²).

(¹) Cfr. ad es. C. SEVERINI, *Sulle equazioni integrali* $\int_a^b \theta(x)x^n dx = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. [« Rend. R. Acc. Naz. Lincei », (5), XXX, 1921, pp. 17-19],

La dimostrazione è semplicissima e con procedimento analogo il prof. L. TONELLI dimostra la chiusura del sistema di funzioni $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ in $(0, 2\pi)$. [Cfr. « Boll. Un. Mat. It. », VI, 1927, p. 123].

(²) G. VITALI, *Sulla condizione di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali.* [« Rend. R. Acc. Naz. Lincei », (5), XXX, 1921, p. 498]. La successione $\{\varphi_n(x)\}$ definita in (a, b) e ivi normalizzata è chiusa, se per ogni x di (a, b) si ha:

$$x - a = \sum_1^\infty {}_r \left[\int_a^x \varphi_r(x)dx\right]^2.$$

Per questo dimostreremo che per ogni x di $(-1, 1)$ si ha:

$$1 + x = \sum_{0}^{\infty}{}_r \frac{2r+1}{2}\left[\int_{-1}^{x} P_r dx\right]^2$$

od anche $[P_0 = 1]$

$$1 - x^2 = \sum_{1}^{\infty}{}_r (2r+1)\left[\int_{-1}^{x} P_r dx\right]^2. \tag{2}$$

Per le note proprietà dei polinomi di Legendre (¹)

$$(2r+1)P_r = P'_{r+1} - P'_{r-1}, \quad P_r(1) = 1, \quad P_r(-1) = (-1)^r$$

si ha

$$(2r+1)\left[\int_{-1}^{x} P_r dx\right]^2 = \frac{1}{2r+1}[P_{r+1} - P_{r-1}]^2 = \frac{1}{2r+1}\int_{-1}^{x} \frac{d}{dx}[P_{r+1} - P_{r-1}]^2 dx$$

$$= \frac{2}{2r+1}\int_{-1}^{x}[P_{r+1} - P_{r-1}][P'_{r+1} - P'_{r-1}]dx = 2\int_{-1}^{x}[P_{r+1} - P_{r-1}]P_r dx$$

e perciò per la somma $S_n(x)$ dei primi n termini della serie del secondo membro della (2) otteniamo

$$S_n(x) = 2\int_{-1}^{x}\sum_{1}^{n}{}_r [P_{r+1} - P_{r-1}]P_r dx = 2\int_{-1}^{x}[P_{n+1}(x)P_n(x) - x]dx. \tag{3}$$

I termini della successione $\{P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - x\}$ in $(-1, 1)$ sono in valore assoluto non superiori a 2, per ogni x tale che $-1 < x < 1$ si ha $\lim_{n\to\infty}[P_{n+1}(x)P_n(x) - x] = -x$ e passando al limite sotto il segno integrale, dalla (3) segue

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = -2\int_{-1}^{x} x dx = 1 - x^2 \qquad \text{c. v. d.}$$

Come applicazione del suo criterio l'A. trova che la successione $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ è chiusa in $(-\pi, \pi)$.

Cfr. anche A. Tonolo, « Boll. Un. Mat. It. », VI, 1927, p. 121.

(¹) Cfr. ad es. U. Dini, *Lezioni sulla teoria delle funzioni sferiche, ecc.*, [lez. lit., 1912, Pisa, p. 28]; oppure E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, [3ª ed., 1920, p. 309].