
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni

- * E. Cartan: Leçons sur la géométrie projective complexe (Beniamino Segre)
- * S. Picard: Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques (Beniamino Segre)
- * P. Montel: Leçons sur les fonctions entières ou monodromes
- * O. Codonnetti: La statica delle costruzioni (Guido Fubini)
- * Oscar Chisini: Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva (Piero Buzano)
- * L. Lichtenstein : Vorlesungen über einige Klassen nicht-linearer Integralgleichungen und Integro-differentialgleichungen

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 11 (1932), n.2, p. 97–113.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_97_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_97_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_97_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1932.

RECENSIONI

E. CARTAN: *Leçons sur la géométrie projective complexe*, d'après des Notes recueillies et rédigées par F. MARTY. (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de G. JULIA, fasc. X), page VII+325. Paris, Gauthier-Villars, 1931.

La *geometria proiettiva complessa* è sorta in epoca relativamente recente. Le sue più remote origini possono trovarsi nel « principio di continuità » di PONCELET e nelle fondamentali ricerche sintetiche sugli imaginari dovute a VON STAUDT; essa però assurge a disciplina autonoma solo mercè l'opera di JUEL e soprattutto di C. SEGRE, al quale debbonsi lo studio sistematico delle trasformazioni antiproiettive (prodotti delle proiettività pel coniugio) e delle rappresentazioni reali delle forme complesse (1889-1892).

Tale indirizzo di studi è stato trascurato per lungo tempo, poichè dobbiamo giungere al 1924 per trovare in *The Geometry of the Complex Domain* di J. L. COOLIDGE un'ampia esposizione della teoria, di cui poi — solo in questi ultimi anni, e specialmente da parte di SEVERI e CARTAN — è stata posta in luce tutta l'importanza.

Nel Trattato in esame, il CARTAN presenta una rielaborazione della materia profondamente originale e suggestiva — alla quale porta contributi essenziali — occupandosi principalmente dello studio del gruppo delle trasformazioni proiettive ed antiproiettive (nel campo complesso) in relazione alla teoria degli spazi di RIEMANN, secondo vedute personali che hanno vari punti di contatto con ricerche anteriori di FUBINI e di STUDY sulle forme hermitiane. Il libro è diviso in due Parti, rispettivamente dedicate alla retta ed agli spazi superiori.

Rappresentati al modo solito i punti complessi di una retta coi punti reali di un piano di ARGAND e GAUSS o di una sfera Σ di RIEMANN, le trasformazioni proiettive ed antiproiettive della retta equivalgono notoriamente alle affinità circolari di MÖBIUS

del piano, ed alle trasformazioni omografiche della sfera Σ in sè, le quali ultime poi posson estendersi a tutto lo spazio ambiente. Così, ad esempio, le proiettività e le antiproiettività involutorie sulla retta, corrispondono rispettivamente alle omografie biassiali ed alle omologie armoniche che mutano Σ in sè, e quindi pure alle rette secanti Σ (da assumersi come uno degli assi di una di quelle omografie biassiali) ed ai punti dello spazio non situati su Σ (da assumersi come centri di una di quelle omologie). Da qui risulta che sulla retta, mentre le involuzioni costituiscono una sola famiglia ∞^4 , le antiinvoluzioni costituiscono due diverse famiglie ∞^3 — antiinvoluzioni di 1^a o di 2^a specie — rispettivamente rappresentate coi punti esterni od interni a Σ , ed aventi ∞^1 o nessun punto unito. L'esistenza della sfera Σ invariante di fronte al gruppo fondamentale, permette di assumerla come *assoluto* di una metrica di CAYLEY-KLEIN, e quindi p. es. di definire *intrinsecamente* la *distanza* di due antiinvoluzioni di 2^a specie.

Quanto precede è ben noto, non fosse altro per le applicazioni che ne son state fatte — segnatamente da POINCARÉ — allo studio delle funzioni fuchsiane e kleiniane. Il CARTAN — nella prima Parte del libro in discorso — riottiene in altra guisa la teoria, completandola in vari punti importanti; egli, per così dire, capovolge l'esposizione dianzi indicata, introducendo « a priori » — nel modo più sotto accennato — la nozione di *distanza* di due involuzioni od antiinvoluzioni della stessa specie, in base a risultati fondamentali da lui conseguiti in altri lavori, che stabiliscono un intimo legame fra gruppi continui connessi possedenti qualche automorfismo involutorio, ed i così detti spazi di RIEMANN simmetrici (¹). Questo nuovo processo, sebbene sia un pò macchinoso, offre il vantaggio di lasciarsi agevolmente estendere agli spazi superiori, come mostra in modo brillante la Parte seconda.

Nel capitolo I della *prima Parte*, richiamate le definizioni concernenti lo spazio proiettivo complesso, le omografie e le antiomografie, vien dimostrato il teorema fondamentale della geometria proiettiva di VON STAUDT, col complemento di DARBOUX. Quest'ultimo vien successivamente esteso alla geometria delle *catene* sulla retta (capitolo II); indi si classificano le omografie e le antiomografie nel campo binario e, in particolare, le antiinvo-

(¹) Di ciò, però, non trovasi nel testo che qualche cenno molto sommario, il libro essendo scritto in modo da esigere nel lettore solo poche nozioni elementari.

luzioni, delle quali si segnala la stretta relazione colle forme hermitiane di due coppie di variabili coniugate.

Il resto della prima Parte è dedicato alle metriche attaccate alle trasformazioni involutorie. E' anzitutto, il capitolo III tratta delle *antiinvoluzioni di 1^a specie*, nel modo seguente. Prese due di queste antiinvoluzioni, C_0 e C_1 , si consideri l'omografia prodotto $H = C_1 \cdot C_0$, e la successione discontinua (o *scala*) di antiinvoluzioni

$$C_i = H^i \cdot C_0 = C_0 \cdot H^{-i} \quad (\text{per } i = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots);$$

si ha $C_{i+1} = C_i \cdot C_{i-1} \cdot C_{i-1}^{-1}$, ossia C_{i+1} risulta la trasformata di C_{i-1} mediante C_i . Essendo inoltre

$$C_q \cdot C_p = H^{q-p} \quad (p, q \text{ interi arbitrari, positivi, nulli o negativi}),$$

si può dire che la « distanza » fra due gradini C_p, C_q della scala considerata, è proporzionale a $q - p$, e precisamente assumere come *distanza* di due qualunque antiinvoluzioni di 1^a specie, C e C' , la metà del logaritmo del moltiplicatore (o caratteristica) dell'omografia $C' \cdot C$. Fra le antiinvoluzioni della precedente scala se ne possono inserire opportunamente delle altre, fino ad ottenere una serie continua ∞^1 , che risulta una *geodetica* dello spazio riemanniano a tre dimensioni delle antiinvoluzioni di 1^a specie.

Lo studio analitico degli enti geometrici via via introdotti — ai quali occorre aggiungere i movimenti e particolarmente le simmetrie del suddetto spazio di RIEMANN — conduce senza difficoltà all'*elemento lineare* di tale spazio, alla sua rappresentazione geodetica sulla *regione esterna ad una sfera*, alla teoria geometrica delle *forme hermitiane*, ecc.

In modo analogo si procede al capitolo IV per le *antiinvoluzioni di 2^a specie*, giungendo in questo caso alla rappresentazione geodetica sulla *regione interna ad una sfera*, e quindi alla geometria di LOBATCHEFSKY, che vien studiata assai dettagliatamente. Da ultimo si accenna allo spazio riemanniano delle involuzioni, ed alla sua rappresentazione colla geometria piana non euclidea complessa; rappresentazione che sostanzialmente non differisce da quella — dovuta a KLEIN e STUDY — dei punti complessi di un piano non situati su di una conica, colle ∞^4 rette che segano una sfera in punti reali e distinti.

Il capitolo V tratta acutamente degli automorfismi² continui del gruppo omografico (in relazione alla nozione di spazio simmetrico), stabilendo che essi provengono solo dalle omografie e dalle antiomografie. Indi vien indicata la possibilità di geometrie, che — secondo le classiche vedute espresse da KLEIN nel Pro-

gramma di ERLANGEN — debbono ritenersi *subordinate* alla geometria proiettiva complessa della retta, segnalando la *geometria piana non euclidea* (nelle due rappresentazioni di CAYLEY-KLEIN e di POINCARÉ) e la *geometria sferica elementare*, che rispettivamente si ottengono prendendo come assoluto un'antiinvoluzione di 1^a e di 2^a specie.

Chiude il capitolo e la prima Parte, un cenno ad alcune applicazioni analitiche ed aritmetiche.

Passando dalla retta agli spazi superiori, occorre alle omografie ed alle antiomografie aggiungere le reciprocità e le anti-reciprocità; ed il numero dei casi proiettivamente distinti che tali enti presentano, cresce rapidamente col numero delle dimensioni dello spazio ambiente. Per trattare a fondo un caso concreto, il CARTAN studia nella *seconda Parte* lo spazio ordinario, senza che ciò costituisca una restrizione essenziale (¹).

Nel capitolo I vengono esposte le nozioni fondamentali sul gruppo proiettivo a tre dimensioni, relative alla sua composizione, alla classificazione delle sue trasformazioni, alla ricerca di quelle involutorie e delle coppie di trasformazioni involutorie fra loro permutabili. Si hanno in totale nello spazio i seguenti nove tipi distinti di proiettività od antiproiettività involutorie, dette genericamente *simmetrie*: le *omologie armoniche*; le *involuzioni biassiali*; le *polarità* rispetto ad una *quadrica* o ad un *complesso lineare*; le *antiinvoluzioni di 1^a specie* (aventi una catena spaziale luogo di punti uniti) e quelle di *2^a specie* (prive di punti uniti); e finalmente le *antipolarità* (definite da forme di HERMITE), che possono essere *ellittiche* (cioè prive di iperquadrica fondamentale), od *iperboliche di 1^a specie* (con un'iperquadrica fondamentale non rigata o iperellissoide) e di *2^a specie* (con un'iperquadrica fondamentale rigata o iperiperboloide).

Ogni specie di simmetria è trasformata in sè dal gruppo delle proiettività ed antiproiettività; e due simmetrie dello stesso tipo son sempre fra loro omograficamente equivalenti. In corrispondenza si ottengono 9 *spazi riemanniani simmetrici*, che vengono studiati al capitolo II, collegandoli opportunamente fra loro.

Lo spazio più interessante è quello delle *antipolarità ellittiche*. Introdotte in esso le *scale geodetiche*, in modo analogo a quello

(¹) Si vedano ad esempio i teoremi di pag. 114 e di pag. 124, che mettono in luce l'influenza che può avere in certe questioni la *parità* della dimensione dello spazio ambiente.

ch'è stato poc' anzi indicato per la retta, si definisce come *distanza* di due antipolarità ellittiche, P e P' , la radice quadrata della somma dei quadrati dei logaritmi delle quattro radici caratteristiche dell'omografia $P'.P$ (tali radici si determinano completamente, assoggettandole a certe condizioni ulteriori). In tal guisa si viene a costruire uno spazio riemanniano fondamentale — a 15 dimensioni — avente per « punti » le antipolarità ellittiche, e del quale si calcola il ds^2 , dando poi della distanza suddetta un'elegante interpretazione geometrica (mediante birapporti), che può considerarsi come l'estensione di quella ben nota di CAYLEY-KLEIN.

Segue lo studio approfondito della *struttura* di tale spazio (proprietà topologiche, trasformazioni isometriche, geodetiche), e specialmente delle *simmetrie* che esso ammette, le quali sono di 8 tipi distinti, e provengono dagli 8 tipi di simmetrie dello spazio ordinario che restano escludendo le antipolarità ellittiche. Ognuna delle prime determina nello spazio di RIEMANN una *varietà simmetrizzante* — totalmente geodetica — luogo di punti uniti, i quali rappresentano le antipolarità ellittiche che son permutabili con una determinata delle seconde simmetrie; e viceversa, la conoscenza della varietà simmetrizzante individua molto semplicemente la simmetria. Le *metriche* relative agli 8 tipi restanti di simmetrie dello spazio ordinario, risultano in tal guisa connesse allo spazio di RIEMANN considerato, e se ne può così effettuare lo studio.

I capitoli III e IV son dedicati alla *metriche subordinate* alla geometria proiettiva dello spazio ordinario, quando in esso si prenda come *assoluto* una determinata simmetria. Ed ecco (capitolo III) passare via via in rassegna — riattaccandole alle cose precedenti — la *geometria non euclidea complessa*; la *geometria di un complesso lineare*; quella definita da un'antiinvoluzione di 1^a specie (*geometria proiettiva reale*), o da un'antiinvoluzione di 2^a specie (*geometria iperbolica reale o dei quaternioni*), o da un'antipolarità iperbolica di 1^a specie (*geometria delle sfere orientate reali*), o da un'antipolarità iperbolica di 2^a specie (*geometria hermitiana iperbolica*) ⁽¹⁾. Infine si dà qualche esempio di geometrie a più assoluti.

Il caso lasciato da parte, e anch'esso già considerato da FUBINI e da STUDY, della *geometria hermitiana ellittica* (in cui cioè l'assoluto è un'antipolarità ellittica), va trattato in altro modo; esso vien studiato profondamente al capitolo IV, ove si introducono anche vari spazi riemanniani (*ellittico, sferico, ecc.*) rappre-

(1) La metrica relativa a questo caso, accennata da POINCARÉ, già era stata sviluppata, da un altro punto di vista, da FUBINI e da STUDY.

sentativi dei diversi tipi di simmetrie *normali* (ossia permutabili coll'assoluto).

Il V ed ultimo capitolo si allontana un pò dal resto del Trattato, ed è un'esposizione — mirabile per semplicità ed eleganza — di proprietà originali e notevoli dei *polinomi armonici*, da cui poi vengon tratte interessanti deduzioni relative alle *rappresentazioni reali* dello spazio proiettivo complesso.

Un polinomio U omogeneo di grado p in $n+1$ variabili $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ ed omogeneo dello stesso grado nelle quantità complesse coniugate $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+1}$, dicesi *armonico d'ordine p* se soddisfa all'equazione a derivate parziali

$$\Delta U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial \bar{x}_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial \bar{x}_2} + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_{n+1} \partial \bar{x}_{n+1}} = 0.$$

I polinomi armonici di dato grado formano un sistema lineare, e posson tutti esprimersi in un modo semplicissimo, che fa intervenire la geometria hermitiana ellittica definita dalla forma $x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_{n+1} \bar{x}_{n+1}$.

Si dice che più funzioni $U_1, U_2, \dots, U_N$ delle suddette variabili formano una *serie di funzioni fondamentali*, quando esse subiscono una sostituzione lineare se si opera sulle (x) mediante un'arbitraria omografia hermitiana. I polinomi armonici di dato ordine fra loro indipendenti danno luogo ad una serie fondamentale, e non vi sono sostanzialmente altre serie fondamentali all'infuori di quelle così definite. Inoltre la totalità dei polinomi armonici costituisce un sistema *completo* di funzioni, due polinomi di ordini diversi risultando sempre fra loro *ortogonali*.

I polinomi armonici di dato ordine p , forniscono subito una *rappresentazione reale* dello S_n proiettivo complesso in cui le (x) sono coordinate omogenee, su di una V_{2n} algebrica, reale, priva di singolarità ed immersa in uno spazio euclideo. La rappresentazione può venir effettuata in guisa che V_{2n} appartenga ad un'ipersfera, e che alle omografie ed alle antiomografie hermitiane di S_n corrispondano trasformazioni di V_{2n} subordinate da *movimenti* dello spazio euclideo ambiente o da *movimenti accompagnati da una simmetria*. Per $p=1$ si ha il caso più semplice, che — prescindendo dalle suddette e da altre non meno interessanti particolarità metriche — non differisce dalla ben nota rappresentazione reale di C. SEGRE degli S_n proiettivi complessi.

Il Trattato in esame — pur essendo tutt'altro che elementare — è di assai facile lettura: ciò è dovuto alle doti eminentemente

mente didattiche dei Corsi di Lezioni che il CARTAN, ormai da vari anni, svolge alla Sorbona, il libro sviluppando appunto il Corso tenutovi durante il semestre invernale 1929-30.

Le preoccupazioni didattiche hanno palesemente impedito un inquadramento della materia in schemi più generali, quali ad esempio le concezioni gruppali di CARTAN stesso — delle quali già si è fatto cenno — ed il teorema di WEYL secondo cui ogni gruppo lineare chiuso lascia invariante almeno una forma di HERMITE definita positiva: ciò avrebbe servito ad alleggerire in vari punti l'esposizione. La quale però — così com'è — è altamente encomiabile. Inoltre, anche attraverso agli eleganti e frequenti sviluppi analitici, non vien mai fatto di perder di vista il contenuto geometrico dei risultati acquisiti: sovente anzi, risultati più o meno riposti di Analisi, vengon ottenuti mediante semplici considerazioni geometriche ⁽¹⁾.

Si tratta insomma di un ottimo libro, ove — il substrato comune essendo la geometria proiettiva — si incontrano teorie elevate (gruppi, spazi di RIEMANN, forme hermitiane) fra loro connesse in modo originale, e numerosi argomenti per nuove ricerche.

BENIAMINO SEGRE

É. PICARD: *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*. Leçons rédigées par J. DIEUDONNÉ. (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de G. JULIA, fasc. IX), pp. VIII+224. Paris, Gauthier-Villars, 1931.

Questo libro — che contiene, raccolte da J. DIEUDONNÉ, le lezioni svolte alla Sorbona dal PICARD nel 1930 — tratta di questioni svariate, collegate alla teoria delle funzioni algebriche di una e di due variabili.

Il capitolo I è dedicato al problema dell'*inversione degli integrali abeliani*, secondo RIEMANN. Stabilito il teorema di JACOBI con tutti i dettagli nel caso ellittico ($p=1$), si accenna al modo di generalizzare la dimostrazione per p qualunque, soffermandosi poi a lungo sul caso di $p=2$, nel quale l'inversione vien effettuata esplicitamente — col dare l'espressione analitica delle relative funzioni abeliane — ed indicando alcune applicazioni all'integrazione di certi sistemi di equazioni differenziali e alle superficie iperellittiche. Tale studio vien completato al capitolo II, ove vien dimostrata l'esistenza (enunciata da RIEMANN e provata per

⁽¹⁾ Ved. p. es. il teorema di pag. 151.

la prima volta da POINCARÉ e PICARD) di una *relazione bilineare* fra i periodi di una funzione meromorfa quadruplamente periodica di due variabili: da rilevarsi le considerazioni che pongono in luce come — per la validità della proposizione — sia necessario che la funzione sia meromorfa.

Un altro ordine di questioni che sorgono per le curve di genere superiore all'unità, è quello relativo alla loro *rappresentazione parametrica mediante funzioni uniformi*. Ricordato a tal proposito (capitolo III) il risultato fondamentale di POINCARÉ, vien stabilito che — per $p > 1$ — le funzioni con cui si può effettuare l'uniformizzazione, non posson mai possedere singolarità essenziali isolate. Ciò vien utilizzato per ottenere un notevole risultato sull'integrabilità mediante funzioni meromorfe di certe equazioni differenziali, e per stabilire alcune proposizioni relative alle funzioni analitiche su di una superficie di RIEMANN, le quali estendono il classico teorema di PICARD sulle funzioni intere.

Lo stretto legame fra le questioni precedenti e la teoria delle funzioni fuchsiane, conduce poi spontaneamente allo studio della ben nota *equazione a derivate parziali da cui dipende la determinazione delle superficie a curvatura costante*; equazione che vien integrata su di una superficie di RIEMANN qualunque (capitolo IV), con metodi analoghi a quelli di uso corrente per le funzioni armoniche.

La parte restante del libro è consacrata alle funzioni algebriche di due variabili indipendenti, e riassume i principali risultati sull'argomento conseguiti dal PICARD ed esposti nel gran Trattato di PICARD e SIMART.

Il capitolo V tratta, con una certa ampiezza, degli *integrali di differenziale totale attaccati ad una superficie algebrica*, la cui introduzione ed il cui studio costituiscono uno dei più bei vanti del PICARD. I teoremi fondamentali relativi agli integrali semplici di 1^a, 2^a e 3^a specie ed alla connessione lineare, son esaurientemente sviluppati, riconducendoli alle proprietà di una certa equazione differenziale lineare; così, ad esempio, il numero degli integrali di PICARD di 2^a specie linearmente indipendenti, risulta espresso dal numero dei polinomi indipendenti che soddisfanno a tale equazione.

Meno dettagliato è lo studio degli integrali doppi. Premesse, al capitolo VI, alcune considerazioni generali sugli *integrali doppi delle funzioni razionali di due variabili*, nel successivo capitolo VII vien delineata la teoria generale degli *integrali doppi di 1^a e 2^a specie attaccati ad una superficie algebrica*, con rapidi tocchi ed opportuni richiami al suddetto Trattato, che — dando una chiara

idea dei tratti salienti di quella teoria — permettono al Lettore volenteroso di ricostruirla completamente.

Chiudono il volume alcune Note (relative all'impossibilità di certi gruppi di punti sulle superficie algebriche, alla connessione lineare ed alle aggiunte di una data superficie algebrica, alle funzioni razionali di tre variabili, ed infine a certe superficie iperfuchsiane e iperabeliane), le quali riproducono quattro pregevoli Memorie dell'Autore: specialmente notevole è la seconda, per legami ch'essa istituisce con risultati della Scuola geometrica italiana.

Il Trattato in esame ha il pregio di condurre rapidamente al cuore di teorie elevate e feconde. Non ostante la mole piuttosto esigua, esso racchiude risultati numerosissimi e svariati — in gran parte dovuti all'Autore — che conservano la loro elegante freschezza, benchè molti di essi datino ormai da parecchi anni. La forma è sempre d'una limpidezza ammirevole, l'esposizione è piana e suggestiva: tutte doti che sono proprie dei numerosi Trattati del PICARD. Questo però possiede un'agilità peculiare — dovuta specialmente ai frequenti ed abili rinvii — ed è consigliabile a chi voglia, senza grave sforzo, acquistare un'esatta nozione dell'importanza che ha per l'Analisi la teoria delle curve e delle superficie algebriche.

BENIAMINO SEGRE

P. MONTEL: *Leçons sur les fonctions entières ou monodromes, recueillies et rédigées par P. SERGESCO*. Pagg. XIV-116. Paris, Gauthier-Villars, 1932.

Questo volume, che contiene la materia di un Corso svolto dal prof. MONTEL per invito della Università di Cluj (Romania), è il primo di una collezione di opere matematiche iniziata dalla stessa Università; viene presentato nella ben nota forma delle altre collezioni analoghe edita dalla Casa Gauthier-Villars. Esso è dedicato alla teoria moderna delle funzioni intere o meromorfe, la quale, iniziata colla scoperta dei valori eccezionali, dovuta al PICARD, si occupa essenzialmente della distribuzione, nell'approssimarsi al punto singolare essenziale, dei punti in cui la funzione assume un valore assegnato. Nella sua ristretta mole, il volume, redatto con sobrietà e con grande chiarezza, contiene una larga copia di nozioni interessanti, come apparirà dalla seguente breve analisi.

Dopo una introduzione in cui, con rapida sintesi, è accennato alle moderne ricerche sulla disposizione delle radici di un'equazione $f(z) = a$ (dove $f(z)$ è una funzione intera o meromorfa) nel

tendere di z al punto singolare, essenziale e ai risultati ottenuti in tale ordine di studi da R. NEVANLINNA, BLOCH, JULIA ed altri, si inizia, col Cap. I, una trattazione sistematica dell'argomento. Viene data dapprima, sulle orme di R. NEVANLINNA, una formula dedotta dal teorema di GREEN, e detta « formula di POISSON-JENSEN », perchè contiene come casi particolari tanto la classica formula di POISSON quanto quella ben nota di JENSEN. Da questa, seguendo sempre il ricordato Autore, si deduce una funzione $T(r, a)$, detta « caratteristica » della data funzione intera o meromorfa $f(z)$, che è in sostanza la somma del valor medio di $f(z)$ sulla circonferenza $|z| = r$ e della somma $\sum_k \frac{r}{c_k}$, dove le c_k sono le radici dell'equazione $f(z) = a$ contenute nel cerchio (r). La $T(r, a)$ è funzione crescente della r , e tendente all'infinito con r , ed un teorema fondamentale di NEVANLINNA dimostra che qualunque siano a e b , $T(r, a)$ e $T(r, b)$ differiscono solo per una funzione limitata di r . Questa funzione equilibra, per così dire, il numero delle radici di $f(z) = a$ in (r) col valor medio, sulla circonferenza, di $\log f(z)$. Nel Cap. II viene mostrato come la funzione $T(r)$ abbia, per le funzioni intere, un comportamento analogo a quello del logaritmo del massimo modulo $M(r)$ su (r), al quale essa si può sostituire per la determinazione dell'ordine della $f(z)$, e come nel caso delle funzioni meromorfe, per le quali $M(r)$, non essendo più funzione crescente, non si presta più, essa venga sostituita appunto da $T(r)$ per la valutazione dell'ordine, non solo, ma anche per la classificazione in tipo massimo, tipo medio e tipo minimo per le funzioni di un medesimo ordine. Il Cap. III è dedicato alla rappresentazione delle funzioni meromorfe in forma di prodotti infiniti che ne pongono in evidenza le radici ed i poli; si definisce il genere per una funzione meromorfa e si pone in relazione coll'ordine. Si accenna poi ai notevoli teoremi, detti di unicità, ed oggetto degli studi recent. di R. NEVANLINNA, POLYA, H. CARTAN ed altri, i quali stabiliscono che noti gli aggregati $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ di punti in cui una funzione $f(z)$ intera o meromorfa assume rispettivamente i valori a , b , c (in particolare 0 , 1 , ∞), esistono al più due funzioni soddisfacenti a tale assunzione: essendo inoltre da notare che dei tre aggregati $E(a)$, $E(b)$, $E(c)$ due soli possono essere presi arbitrariamente. Il Cap. IV è dedicato principalmente alla dimostrazione di un secondo teorema di NEVANLINNA (completato da altri Autori) il quale dà un limite per la rapidità di crescita di $T(r)$ quando si conosce la distribuzione delle radici di $f(z) = z_i$ ($i = 1, 2, \dots, q$, con $q \geq 3$). Infine, nei Capitoli V e VII, l'A. espone con chiarezza e relativa semplicità i fondamenti, a lui dovuti,

della teoria delle famiglie normali di funzioni, teoria di cui la prima origine si ha nel concetto di equicontinuità stabilito dall'ASCOLI, ed in un susseguente fondamentale teorema dell'ARZELÀ. Dalle proprietà delle famiglie normali di funzioni analitiche ed in particolare dal bel teorema che « se una famiglia di funzioni analitiche regolari in un campo D non assume mai in questo campo nè il valore 0 nè il valore 1, questa famiglia è « normale », egli deduce con sorprendente semplicità il famoso teorema di PICARD, che dimostra l'esistenza di un valore eccezionale al più per una funzione intera, di due valori eccezionali al più per una funzione meromorfa, ed il non meno celebre teorema di LANDAU, come pure il noto teorema di SCHOTTKY che lo ha preceduto.

La lettura del libro del MONTEL, piana e non richiedente cognizioni superiori a quelle che si acquistano nei soliti corsi di Analisi, è da raccomandarsi ai nostri giovani cultori della Teoria delle Funzioni, anche perchè si tratta di un ordine di studi interessante ma da noi trascurato: tanto che nella recensione di un'opera di argomento analogo, una voce autorevole lamentava che nell'esteso elenco bibliografico unito all'opera stessa mancasse un qualsiasi nome italiano.

s. p.

G. COLONNETTI: *La statica delle costruzioni*. (Vol. II, parte 1^a) (*). Torino (U. T. E. T.) (1932).

Tutti i matematici hanno sentito il desiderio di veder reso più intime le relazioni fra la matematica pura e le scienze sperimentali, da cui la prima ha tratto i problemi più importanti, i principi più fecondi. Ma assai spesso il matematico, che legge a tal fine libri tecnici, si sente scoraggiato o dalla incompleta enunciazione delle ipotesi di partenza, o dalla evidente insufficienza dei ragionamenti, o dal fatto che si trascurano quantità senza spiegare perchè esse siano effettivamente trascurabili di fronte ad altre di cui si tiene conto, o infine perchè egli non sempre riesce a distinguere con chiarezza ciò che si ammette da ciò che si deduce.

(*) Questo secondo volume si può leggere indipendentemente dal primo, che è di carattere più generale. Il libro, di cui qui ci occupiamo, vuole invece condurre il lettore con l'esempio delle travature piane, esempio di importanza fondamentale per l'ingegnere, e col suo studio accurato svolto coi metodi più semplici e suggestivi, ad apprezzare le teorie generali, ed a intuirne l'importanza per lo studio dei problemi di tipo più elevato e complesso.

Questo libro del COLONNETTI invece si distingue subito (come già il precedente volume) per il perfetto rigore logico, per la acuta e minuziosa discussione delle ipotesi iniziali e dei procedimenti approssimati a cui si deve ricorrere, per la chiarezza ed eleganza della trattazione, per i numerosissimi esempi con cui sono illustrati teoremi e costruzioni grafiche. Per me, matematico, la sua lettura è stata un vero godimento; e io non credo di poter fare augurio migliore alla scienza italiana che esprimendo la speranza di veder un giorno tutte le applicazioni tecniche della meccanica illustrate da una collana di libri simili a questo. Con ciò naturalmente non escludo di aver trovato qua e là qualche lieve oscurità, qualche lievissima menda, d'altronde inevitabili in una prima edizione: ma questo nulla toglie alla nitida chiarezza dell'insieme.

L'A. comincia con uno studio elementare delle travature piane; con numerosi esempi semplicissimi studia le travature definite completamente dalla lunghezza delle loro aste, tanto quelle senza aste sovrabbondanti, quanto quelle che eventualmente ne contengono. Definisce le aste di vincolo, facendo vedere che la loro funzione non è sostanzialmente distinta da quella delle altre. Prima con esempi, poi coa metodo analitico generale, infine con eleganti costruzioni grafiche distingue gli spostamenti *normali* dei nodi dagli *anormali*. Con rigore critico esamina la distinzione tra aste principali ed aste sovrabbondanti; e per le *dilatazioni*, di cui sono suscettibili le aste di una travatura, enuncia un teorema di M. LÉVY. Ma, dopo averne dato la dimostrazione analitica completa, subito con un'altra dimostrazione più semplice lo rende intuitivo ed evidente *a priori*.

L'A. passa poi al problema dell'equilibrio statico, esponendo nel modo più perspicuo le condizioni sotto cui il principio dei lavori virtuali basta a risolverlo; e in tal caso con metodo analitico e grafico trova le tensioni sviluppate nelle singole aste. Riprende poi questo problema da un punto di vista più generale, che serve a porre in più chiara luce le condizioni di risolubilità. Definite le travature a nodi canonici, e le sezioni canoniche, dà un primo cenno dei diagrammi cremoniani, espone i metodi di CULMANN e di RITTER, dimostrando quanto possa essere utile la cooperazione dei vari metodi nella risoluzione di uno stesso problema.

Lo studio dei sistemi iperstatici porta necessariamente allo studio delle deformazioni delle singole travi ed all'esame dei fenomeni elastici. Viene quindi enunciata la legge di HOOKE con l'esame accurato dei limiti della sua validità; e si chiarisce come, nonostante l'imperfezione della legge di partenza, la teoria del-

l'elasticità sia così preziosa per l'ingegnere. Premesso lo studio dei diagrammi (di WILLIOT) per calcolare lo spostamento dei nodi di una travatura, l'A. inizia senz'altro lo studio delle travature staticamente indeterminate, che si riduce in sostanza allo studio della statica di un corpo elastico in un caso semplice, ma di importanza fondamentale per la tecnica. Definito lo *stato naturale* come quello che si ha in assenza di forze esterne (in cui però, per svariate ragioni, le travi possono essere sottoposte a coazioni interne), si definisce con gran cura l'*energia potenziale elastica*, che si trova uguale alla somma del valore di tale energia nello stato naturale e del lavoro di deformazione compiuto dalle forze esterne.

Per risolvere il problema della statica di una travatura, l'A. considera sia i sistemi di deformazioni *congruenti* delle singole travi (quelle cioè dovute ad uno spostamento arbitrario dei nodi) sia i sistemi di tensioni *equilibrate* (che equilibrano le forze esterne). Il primo modo, quello classico, consiste nel cercare tra tutti i possibili sistemi di deformazioni congruenti quello a cui corrisponde, secondo la legge di HOOKE, un sistema di tensioni equilibrato. Un secondo metodo è di cercare tra tutti i sistemi equilibrati di tensioni quello, a cui, per la legge di HOOKE, corrisponde un sistema di deformazioni che sia congruente. Questo secondo metodo conduce al teorema di MENABREA, di cui viene ampiamente discusso il significato fisico, e che è illustrato da esempi i quali ne pongono in chiara luce l'importanza per le applicazioni. La ricerca degli spostamenti (e loro componenti) dei nodi di una travatura conduce al teorema di CASTIGLIANO, che, al solito, è illustrato nei modi più vari.

Pure con numerosissime applicazioni si espongono sia il teorema di reciprocità del BETTI (il cui enunciato, nel caso delle travature, riesce di perspicua semplicità), sia quel suo caso particolare, che era già stato studiato dal MAXWELL. Segue lo studio dell'ellisse terminale degli spostamenti elastici e dei teoremi relativi dovuti al CULMANN. E, al solito, dopo la parte generale, l'A. si preoccupa delle applicazioni, facendo vedere quali difficoltà si presentino e come si sormontino in modo che basta nei problemi della pratica.

Dai teorema di MENABREA l'A. deduce poi il secondo teorema di reciprocità (dovuto all'A. stesso), che egli illustra con numerosi esempi. E, come dal primo teorema di reciprocità si era dedotto lo studio della *linea di influenza* per lo spostamento di un nodo, da questo secondo teorema l'A. deduce la *linea di influenza* relativo allo sforzo di un'asta. Così pure egli giunge ad una interessante generalizzazine della ellisse degli spostamenti terminali.

Un intero capitolo è dedicato allo studio dello *stato naturale* sopra definito, allo studio delle varie ragioni per cui in tale stato le singole aste possono subire coazioni, e infine alla esposizione di importanti risultati dovuti all'A. stesso.

Gli ultimi due capitoli del libro sono dedicati allo sviluppo di esempî (90 tavole) scelti tra quelli di applicazione più frequente: il primo si occupa dei diagrammi cremoniani, di cui viene spiegata la costruzione nei più minuti particolari, così da togliere ogni incertezza a chi ne intraprenda lo studio; l'ultimo capitolo è dedicato all'esame delle linee di influenza per gli sforzi nelle aste dei sistemi staticamente determinati.

Il procedimento uniforme, dedotto dal secondo teorema di reciprocità, permette di trattare con uno stesso metodo della massima semplicità concettuale problemi svariatiissimi. E l'A. si ripromette, nella seconda parte del libro, di applicare il suo metodo allo studio dei sistemi iperstatici. Il matematico si meraviglia di vedere problemi fondamentali ridotti nel modo più brillante a facili problemi di geometria elementare, tutti di un medesimo tipo.

In conclusione ci si può domandare soltanto come mai, nei nostri corsi complementari di meccanica e di fisica matematica, si trascurino tutti i problemi a cui è dedicato questo libro: problemi che, riferendosi a casi specialmente semplici, gettano così viva luce sulle teorie generali, illustrano il significato fisico di tanti teoremi, e ne dimostrano l'incomparabile importanza per la semplice risoluzione di tanti problemi fondamentali per le applicazioni tecniche.

GUIDO FUBINI

OSCAR CHISINI: *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva*; pagine VI-489; Bologna, Zanichelli, 1931.

Quest'opera rientra in quell'indirizzo, ormai diffuso in Italia, che si ispira al criterio più organico di attingere il meglio dai vari metodi con lo scopo di riunire in un tutto armonico le nozioni della Geometria Analitica e della Geometria Proiettiva.

E poichè alla distribuzione della materia influisce notevolmente il modo con cui è svolta la teoria delle coniche, giova subito osservare che in queste Lezioni si adotta la storica definizione di conica come sezione di cono circolare (cap. V), che rispetto a quella più astratta dello STAUDT presenta il vantaggio di risparmiare la trattazione generale delle corrispondenze proiettive tra piani, essendo sufficienti alcuni cenni sull'omologia (cap. V, §§ 95-97). E allora si comprende come, da un lato potendosi acquistare fin da principio una maggiore libertà di linguaggio con l'introdurre i

concetti di proiezione ed elemento improprio, e dall'altro venendo a mancare ragioni di continuità a favore del rinvio di tali nozioni, sia stato opportuno anticipare nel capitolo II lo studio delle proiettività tra forme di 1^a specie, dopo di aver introdotto fin dal primo capitolo, su le relazioni segmentarie ed angolari, i concetti di punto improprio (attraverso lo studio del rapporto semplice) e di birapporto.

Nel secondo capitolo si manifesta subito l'ottimo criterio di fornire le varie nozioni solo quando si rendono necessarie ed il lettore è preparato a riceverle. Perciò non sono enunciati i postulati fondamentali della Geometria Proiettiva, il cui scopo non potrebbe essere compreso dal principiante, e di conseguenza non è ancora messa in luce la legge di dualità, bastando per ora attirare l'attenzione su la profonda analogia fra le proprietà del quadrangolo e quelle del quadrilatero, fra le costruzioni relative alla punteggiata e quelle relative al fascio di rette. Le proiettività vi sono definite nel modo più naturale, come prodotti di prospettività, ed è soppresso il teorema di STAUDT, che sarebbe fuor di luogo, non essendo poi svolte le omografie tra piani. Nella prima parte del capitolo, secondo il criterio già rilevato, non è introdotta la nomenclatura delle forme geometriche fondamentali, e solo più innanzi si accenna alle forme di prima specie.

Le varie considerazioni sulla legge di dualità piana che, come osserva l'Autore, non poteva comprendersi se non dopo la conoscenza di un sufficiente materiale d'esempio, trovano posto fra gli elementi della Geometria analitica, trattati nei capitoli III e IV, fra cui sono anche da notare alcuni cenni sulle parabole interpolatrici (§ 62). La teoria proiettiva e analitica delle coniche è svolta nei capitoli V e VI, deducendo in modo intuitivo i teoremi sulla generazione proiettiva con il metodo delle proiezioni centrali, e stabilendo con un semplice ragionamento (§ 119) l'equivalenza della definizione analitica con l'altra, già accennata.

Fra gli elementi della teoria delle quadriche (definite analiticamente) svolti nel capitolo VII, è da rilevare quanto riguarda la determinazione degli assi (§ 144), accompagnata da un dettagliato esempio numerico. E qui torna a proposito un elogio del largo uso, in questo libro, degli esempi numerici, che offrono i vantaggi della concretezza senza perdere quelli della generalità.

Brevi nozioni su le superficie e linee nello spazio formano argomento dell'ottavo ed ultimo capitolo.

La chiarezza dell'esposizione è ovunque curata, rivelando la preoccupazione non solo di dimostrare, ma anche di convincere. Però sarebbe desiderabile che qualche punto fosse meglio precisato.

Così nel teorema dei triangoli omotetici (§ 19, pag. 49) non sembra sufficiente dire che se B, B', O, O_1 sono punti di una stessa retta ed è $BO : B'O = BO_1 : B'O_1$, i punti O ed O_1 devono coincidere, poichè ivi non si parla di segni. Così l'osservazione (pag. 371) sull'invarianza del grado dell'equazione di una conica per cambiamento di coordinate richiederebbe qualche parola di dimostrazione.

Una innovazione in questo libro, non priva di un certo valore pratico, è costituita dall'introduzione dei coseni direttori di un piano (§ 73) come coseni degli angoli che la normale al piano fa con gli assi; cosicchè, mentre nello spazio i coseni direttori di una retta sono definiti nel solito modo (§ 71), nel piano invece sono definiti, per analogia con i coseni direttori di un piano, come coseni degli angoli che la normale alla retta fa con gli assi (§ 41): e forse sarebbe stato opportuno fare rilevare la diversità fra le due definizioni.

Gli elementi immaginari compaiono poche volte e quindi l'Autore si risparmia considerazioni sul loro uso, che dice sarebbero fuor di proposito (§ 126, pag. 399). Ma essi, insieme alle proprietà generali delle curve algebriche e allo studio delle omografie e reciproità, troveranno certamente posto nei volumetti di complementi annunciati nella prefazione, che contribuiranno ottimamente alla formazione di quella mentalità scientifica a cui già tende questo libro; il quale, pur dimostrando di essere stato lungamente elaborato per la Scuola, non rimane però solo un libro scolastico, perchè anche chi, possedendo già i principii, lo legge con mente più agguerrita, riesce a trovarvi cose nuove ed a scoprire significati più riposti.

PIERO BUZANO

L. LICHTENSTEIN: *Vorlesungen über einige Klassen nicht-linearer Integralgleichungen und Integro-differentialgleichungen*. Berlino. Springer, 1931, pagg. X+164.

Questo libro di L. LICHTENSTEIN costituisce la prima esposizione sistematica sulle equazioni integrali ed integro-differenziali non lineari ed è veramente notevole. L'A. si occupa dapprima di equazioni integrali non lineari « in piccolo »; più precisamente considera equazioni del tipo

$$\varphi(x) + \int_0^1 k(x, x_1)\varphi(x_1)dx_1 = v(x) + F(\varphi(x), v(x))$$

nelle quali φ è l'incognita e F una operazione funzionale non lineare e ne studia le proprietà finchè $v(x)$ ha valori sufficientemente

piccoli. Pur con questa limitazione i risultati, dovuti, come è noto, in parte ad H. SCHMIDT, in parte all'A. stesso, si prestano ad applicazioni notevoli. A queste l'A. dedica il secondo capitolo, nel quale si trovano suggestivamente esposti risultati relativi a campi assai diversi: dalle onde in due dimensioni di ampiezza finita fino ad un problema ai limiti nel campo dell'irraggiamento termico, e a problemi relativi alle equazioni alle derivate parziali del tipo ellittico.

Sempre rimanendo « in piccolo » l'A. studia poi (nel terzo capitolo) alcune equazioni non lineari integro-differenziali; le applica allo studio della equazione più generale alle derivate parziali di tipo ellittico, a problemi di calcolo delle variazioni ed infine all'Idro-dinamica, riannodando così ad un unico fondamento analitico ricerche in campi disparati già svolte dall'A. stesso.

L'ultimo capitolo del libro (il quarto) studia le equazioni integrali lineari « in grande ». Qui naturalmente i risultati sono conseguiti con maggiore difficoltà e tuttavia sono assai notevoli i due qui esposti: per due classi di equazioni non lineari di prima specie, l'A. può concludere che esiste almeno un autovalore, per un'altra classe egli può affermare l'esistenza della soluzione.

Con questo risultato termina il libro; del quale spero di essere riuscito a mostrare l'interesse, invogliando alla lettura.

g. s.
