Bollettino Unione Matematica Italiana

P. Laberenne

Sur une fonction admettant une infinité dénombrable de points de discontinuité

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.2, p. 87–96.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_87_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1932.

Sur une fonction admettant une infinité dénombrable de points de discontinuité.

Nota di P. LABÉRENNE (a Chartres - Francia).

Définition de la fonction. — Soient n et N les bases de deux systèmes de numération ($1 < n < N$), et soit x un nombre quelconque; nous *écrivons* ce nombre dans le système de base n:

$$x = a_q n^q + a_{q-1} n^{q-1} + \dots + a_0 + a_{-1} n^{-1} + a_{-2} n^{-2} + \dots = \sum_{i=q}^{i=-\infty} a_i n^i,$$

(les chiffres a_i pouvant tous être nuls à partir d'un certain rang si le développement de x est limité). Nous *lisons* alors le nombre obtenu: $a_q a_{q-1} \dots a_0$, $a_{-1} \dots$ comme un nombre du système de base N, ce que nous pouvons faire puisque nous avons supposé $n < N$. Nous obtenons un nouveau nombre:

$$y = \sum_{i=q}^{i=-\infty} a_i N^i.$$

Le nombre y ainsi défini est une fonction de x. C'est cette fonction que nous nous proposons d'étudier dans ce qui va suivre.

Premières propriétés de y. — A tout nombre x admettant une seule représentation dans le système de base n correspond une seule valeur de y. Mais certains nombres admettent deux représentations dans le système de base n; ce sont les nombres n-ésimaux à développement limité (qui s'écrivent au moyen d'un nombre fini de chiffres après la virgule et qui admettent aussi une représentation illimitée terminée par une infinité de $n-1$; cf. dans le système décimal: $2{,}3 = 2{,}2999\dots$). A ces nombres correspondent ainsi deux valeurs différentes de y. Ce sont donc des valeurs de discontinuité pour la fonction.

Inversement, à tout nombre y correspond un seul nombre x qu'on calcule par les méthodes habituelles des changements de base. Il ne peut pas y avoir de cas d'exception; la seconde représentation des nombres N–ésimaux à développement limité se termine, en effet, par une infinité de chiffres $N-1$ et ne peut provenir, par suite, d'un nombre écrit dans le système n–ésimal où ce chiffre ne figure pas.

On voit ainsi que la correspondance entre x et y est univoque et réciproque, sauf pour les nombres n–ésimaux à développement limité. Ces valeurs particulières de x correspondent à des discontinuités de y. Remarquons immédiatement qu'elles forment une infinité dénombrable.

La fonction y n'est donc pas continue; c'était évident *a priori* puisqu'elle varie et que son écriture ne contient pas $N-n \geq 1$ des chiffres du système de numération dans lequel on la lit.

Nous pouvons encore énoncer deux autres propriétés de y:

1°) y est une fonction croissante.

2°) Elle n'admet pas d'autres points de discontinuité que ceux que nous venons de trouver.

La première proprieté est une conséquence immédiate des lois de numération qui sont communes à tous les systèmes. Elle permet d'obtenir facilement toutes les valeurs de y dans l'ordre où elles se succèdent, x croissant. Il suffit pour cela de conserver dans l'ensemble des nombres écrits dans le système N (et rangés par ordre de grandeur) tous ceux qui ont un sens dans le système n. L'ensemble des nombres ainsi obtenus a la puissance du continu, comme d'ailleurs l'ensemble des nombres supprimés. C'est là une propriété bien connue de la théorie des ensembles.

Les remarques précédentes vont nous permettre de trouver les points de discontinuité de y. Il nous suffira d'étudier les intervalles supprimés dans l'ensemble des nombres écrits dans le système de base N. Le premier nombre supprimé au début de l'un de ces intervalles est un nombre dont le développement N–ésimal est limité et dont tous les chiffres sont inférieurs à n sauf le dernier qui est n lui-même, nombre dont l'écriture sera, p. ex.: $\alpha\beta\ldots,\ \varepsilon\lambda\ldots\nu\rho n$; le plus grand nombre conservé avant l'intervalle sera donc: $\alpha\beta\ldots,\ \varepsilon\lambda\ldots\nu\rho(n-1)$ (¹). Au contraire le plus petit nombre conservé après les nombres supprimés sera celui que l'on obtient en ajoutant au nombre précédent une unité de l'ordre N–ésimal de ρ, soit $\varepsilon\beta\ldots,\ \varepsilon\lambda\ldots\nu(\rho+1)$, si $\rho \neq n-1$; $\alpha\beta\ldots,\ \varepsilon\lambda\ldots(\nu+1)$, si $\rho=n-1$ et si $\nu \neq n-1\ldots$ etc. Or les écritures des deux nom-

(¹) Par convention nous poserons:

$$0,\ (n-1)(n-1)(n-1)\ldots = 0,\ (n\overline{-1})$$
$$\alpha\beta\ldots,\ \lambda\rho(n-1)(n-1)\ldots = \alpha\beta\ldots,\ \lambda\rho(\overline{n-1})\ \text{etc.}$$

bres extrêmes considérés qui limitent extérieurement l'intervalle supprimé, correspondent à un même nombre n-ésimal; la seconde est la représentation de ce nombre par un développement n-ésimal limité, la première sa représentation par un développement illimité. Ainsi toutes les discontinuités de y correspondent bien aux valeurs de x trouvées précédemment.

Propriété essentielle de y. — La fonction y étant évidemment bornée dans un intervalle fini quelconque et admettant une infinité dénombrable de points de discontinuité, un théorème de M. LEBESGUE nous apprend qu'elle est intégrable (R) dans cet intervalle.

Nous le vérifierons d'ailleurs dans un intervalle particulier en appliquant les méthodes de DARBOUX.

Nous considérerons d'abord l'intervalle particulier 0, n, dans lequel nous intégrerons y, puis nous étendrons les résultats obtenus.

Nous prendrons comme divisions successives de l'intervalle 0, n celles qui correspondent aux points de discontinuité: pour la 1ère division les valeurs entières de x; pour la 2°, les points de la 1ère et les nombres n-ésimaux à un chiffre; pour la 3°, les points des deux premières et les nombres n-ésimaux à deux chiffres, et ainsi de suite.

On pourra ainsi former les tableaux suivants:

Première division: n intervalles.

x	0		1		2...		... n
y	0	$0, (\overline{n-1})$	1	$1, (\overline{n-1})$	2...	... $(n-1), (\overline{n-1})$	N

ou comme:

$$0, (\overline{n-1}) = \frac{n-1}{N} + \frac{n-1}{N^2} + \ldots = (n-1)\left[\frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} + \ldots\right] = \frac{n-1}{N-1}$$

x	0		1		2...		... n
y	0	$\frac{n-1}{N-1}$	1	$1+\frac{n-1}{N-1}$	2...	... $n-1+\frac{n-1}{N-1}$	$N.$

Deuxième division. Chacun des n premières intervalles est divisé en n nouveaux intervalles. Nous avons ainsi n^2 intervalles.

x	0		$\frac{1}{n}$		$\frac{2}{n}$		1		$1+\frac{1}{n}$	$1+\frac{2}{n}$ ......
y	0	$0,0(\overline{n-1})$ ou $\frac{n-1}{N-1}$	$\frac{1}{N}$	$0,1(\overline{n-1})$ ou $\frac{1}{N}+\frac{n-1}{N(N-1)}$	$\frac{2}{N}$	$\frac{n-1}{N-1}$	1	$1,0(\overline{n-1})$ ou $1+\frac{n-1}{N(N-1)}$	$1+\frac{1}{N}$	$1,1(\overline{n-1})$ ou $1+\frac{1}{N}+\frac{n-1}{N(N-1)}$
										$1+\frac{2}{N}$ ......

Nous diviserons de même chacun des intervalles de cette deuxième division en n nouveaux intervalles, en passant à la troisième division et ainsi de suite.

Les valeurs de x choisies comme limites des intervalles sont équidistantes les unes des autres dans chaque division. L'intervalle $x_{i+1} - x_i$ entre deux points de division consécutifs de la q-ième division est $\frac{1}{n^{q-1}}$. On voit en outre que, de cette manière, nous prenons successivement comme points de division toutes les valeurs de x correspondant à des discontinuités.

y, comme nous l'avons déjà remarqué, est évidemment bornée dans chacun des intervalles considérés. Soient alors M_i et m_i le maximum et le minimum de y dans l'intervalle x_i, x_{i+1}; nous allons démontrer que $\Sigma(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$ *tend vers* 0 en même temps que $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n^{q-1}}$, c'est à dire *quand le nombre q augmente indéfiniment. Ceci suffira à établir directement que y est sommable dans l'intervalle considéré.*

Or pour une division de rang donné la différence $M_i - m_i$ est la même pour tous les intervalles et est égale (y étant croissante) à la différence des valeurs de y correspondant aux extrémités de l'intervalle; on aura donc pour chaque division:

$$\Sigma(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = (M_i - m_i)\,\Sigma(x_{i+1} - x_i) = (M_i - m_i) \times n.$$

Mais pour la première division:

$$M_i - m_i = 0, \quad \overline{(n-1)} = \frac{n-1}{N-1},$$

pour la deuxième:

$$M_i - m_i = 0, \quad 0\overline{(n-1)} = \frac{n-1}{N(N-1)}$$

. . . .

pour la q-ième:

$$M_i - m_i = 0, \quad 00\ldots0\overline{(n-1)} = \frac{n-1}{N^{q-1}(N-1)}$$

$(q-1)$ fois.

On est ainsi ramené à chercher la limite de $\frac{(n-1)n}{N^{q-1}(N-1)}$ pour q infini; c'est évidemment zéro. Donc la fonction est sommable.

Calcul de l'intégrale définie de 0 à n. — Nous la calculerons comme la limite de $\Sigma m_i(x_{i+1} - x_i)$ en évaluant successivement les sommes correspondant aux diverses divisions.

Première division. $x_{i+1} - x_i = 1$, et les valeurs de m_i pour les différents intervalles sont $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Ainsi:

$$\sum\nolimits_1 = 0 + 1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Deuxième division. $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$, et les valeurs de m_i sont $0,\ 0 + \frac{1}{N}, \dots,\ 0 + \frac{n-1}{N},\ 1,\ 1 + \frac{1}{N}, \dots$ On aura:

$$\sum\nolimits_2 = \left[0 + \left(0 + \frac{1}{N}\right) + \dots + \left(0 + \frac{n-1}{N}\right)\right] \times \frac{1}{n} + \left[1 + \left(1 + \frac{1}{N}\right) + \dots\right] \times \frac{1}{n} + \dots$$

$$\sum\nolimits_2 = 0 + 1 + 2 + \dots + n - 1 + n \times \left(\frac{1}{N} + \frac{2}{N} + \dots + \frac{n-1}{N}\right) \times \frac{1}{n}$$
$$= \sum\nolimits_1 + \frac{n(n-1)}{2N}.$$

q–ième *division.* On arrive de même dans le cas général à la formule de récurrence:

$$\sum\nolimits_q = \sum\nolimits_{q-1} + \frac{n(n-1)}{2N^{q-1}}.$$

On en déduit:

$$\sum\nolimits_q = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{N} + \dots + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{N^{q-1}}$$
$$= \frac{n(n-1)}{2} \times \left(1 + \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} + \dots + \frac{1}{N^{q-1}}\right).$$

Quand q augmente indéfiniment, Σ_q tendra donc vers l'intégrale I:

$$I = \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{N}{N-1} = \frac{Nn(n-1)}{2(N-1)}.$$

Remarque: Considérons l'intégrale I' que l'on obtiendrait entre les mêmes limites sans faire le changement de base, c'est à dire pour $y = x$:

$$I' = \int_0^n x\,dx = \frac{n^2}{2}$$

$$I' - I = \frac{n^2}{2} - \frac{Nn(n-1)}{2(N-1)} = \frac{n(N-1)}{2(N-1)} > 0.$$

Donc:

$$I' > I.$$

Calcul de l'intégrale indéfinie. — Nous nous proposons de calculer $\int_0^x y\,dx$, x étant un nombre quelconque, à développement

n-ésimal limité ou illimité, soit: $x = \sum_{i=q}^{i=-\infty} a_i n^i$, (les chiffres a_i étant tous nuls à partir d'un certain rang si le développement de x est limité). Mais auparavant nous allons encore calculer quelques intégrales définies (dont on pourrait démontrer directement l'existence par des raisonnements analogues à ceux que nous venons de faire). Nous avons déjà :

$$\int_0^n y\,dx = \frac{Nn(n-1)}{2(N-1)}.$$

Calculons maintenant $\int_0^{n^2} y\,dx$; on peut écrire:

$$\int_0^{n^2} y\,dx = \int_0^n y\,dx + \int_n^{2n} y\,dx + \dots + \int_{(n-1)n}^{n^2} y\,dx.$$

Or on obtient la valeur de y correspondant à un nombre x compris entre n et $2n$ en ajoutant N à la valeur de y qui correspond à $x - n$ (compris entre 0 et n); d'où:

$$\int_0^{2n} y\,dx = nN + \int_0^n y\,dx;$$

en répétant le même raisonnement

$$\int_{2n}^{3n} y\,dx = 2nN + \int_0^n y\,dx....$$

finalement:

$$\int_0^{n^2} y\,dx = \frac{n^2N^2(n-1)}{2(N-1)}$$

et d'une manière générale:

$$\int_0^{n^i} y\,dx = \frac{n^iN^i(n-1)}{2(N-1)}$$

pour $i \geq 1$ (les valeurs de i étant entières, bien entendu).

Il est facile de voir que cette formule est aussi vraie pour les valeurs entières et négatives, ou pour la valeur zéro de i. En effet, en nous servant du système de divisions successives des intervalles indiqué précédemment, nous trouvons:

$$\int_0^1 y\,dx = \frac{2(N-1)}{n-1},$$

$$\int_0^{\frac{1}{n}} y\,dx = \frac{n-1}{2nN(N-1)}, \dots \quad \int_0^{\frac{1}{n^j}} y\,dx = \frac{n-1}{2n^j N^j (N-1)},$$

(j étant entier et positif).

La formule donnant l'intégrale est donc absolument générale.

Revenons maintenant à l'intégrale définie $\int_0^x y\,dx$, ou encore:

$$\int_0^{a_q n^q + a_{q-1} n^{q-1} + \dots + a_0 + a_{-1} n^{-1} + a_{-2} n^{-2} + \dots} y\,dx.$$

Nous calculerons d'abord

$$\int_0^{a_q n^q} y\,dv, \quad \text{puis} \int_{a_q n^q}^{a_1 n^q + a_{q-1} n^{q-1}} y\,dx \quad \text{puis} \int_{a_a n^q + a_q n^{q-2}}^{a_q n^q + a_{q-1} n^{q-1} + a_{q-2} n^{q-2}} y\,dx, \dots$$

et ainsi de suite. Pour chacune de ces intégrales on pourrait démontrer directement, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut, que la fonction est sommable dans l'intervalle considéré. Finalement, en faisant la somme des diverses intégrales, nous aurons le développement de $\int_0^x y\,dx$ en fonction des chiffres qui servent à écrire x dans le système n-ésimal.

On a d'abord:

$$\int_0^{a_q n^q} y\,dx = \int_0^{n^q} y\,dx + \int_{n^q}^{2n^q} y\,dx + \int_{2n^q}^{3n^q} y\,dx + \dots + \int_{(a_q-1)n^q}^{a_q n^q} y\,dx.$$

En reprenant le raisonnement qui nous a déjà servi pour le calcul de $\int_0^{n^q} y\,dx$, nous voyons que:

$$\int_0^{a_q n^q} y\,dx = \int_0^{n^q} y\,dx + N^q n^q + \int_0^{n^q} x\,dx + 2N^q n^q + \ldots + (a_q - 1)N^q n^q + \int_0^{n^q} y\,dx$$

$$= N^q n^q \times [1 + 2 + \ldots + (a_q - 1)] + a_q \int_0^{n^q} y\,dx$$

$$= N^q n^q \times \frac{(a_q - 1)a_q}{2} + a_q \times \frac{N^q n^q (n-1)}{2(N-1)}.$$

Calculons maintenant $\int_{a_q n^q}^{a_q n^q + a_{q-1} n^{q-1}} y\,dx$. Une valeur de y correspondant à une valeur de x comprise entre $a_q n^q$ et $a_q n^q + a_{q-1} n^{q-1}$ est égale à la valeur de y correspondant à $x - a_q n^q$ (nombre compris entre 0 et $a_{q-1} n^{q-1}$) augmentée d'une constante $a_q N^q$; on a donc:

$$\int_{a_q n^q}^{a_q n^q + a_{q-1} n^{q-1}} y\,dx = a_q N^q \times a_{q-1} n^{q-1} + \int_0^{a_{q-1} n^{q-1}} y\,dx;$$

la dernière intégrale se calcule par la formule trouvée pour $\int_0^{a_q n^q} y\,dx$, d'où:

$$\int_{a_q n^q}^{a_q n^q + a_{q-1} n^{q-1}} y\,dx = a_q n_{q-1} N^q n^{q-1} + \frac{(a_{q-1} - 1)a_{q-1}}{2} N^{q-1} n^{q-1} + a_{q-2} \frac{N^{q-2} n_{q-2} (n-1)}{2(N-1)}.$$

De même:

$$\int_{a_q n^q + a_{q-1} n^{q-1}}^{a_q n^q + a_{q-1} n^{q-1} + a_{q-2} n^{q-2}} y\,dy = (a_q N^q + a_{q-1} N^{q-1}) a_{q-2} n^{q-2} +$$

$$+ \frac{(a_{q-2} - 1)a_{q-2}}{2} N^{q-2} n^{q-2} + a_{q-2} \frac{N^{q-2} n^{q-2} (n-1)}{2(N-1)}, \text{ etc.}$$

On obtient ainsi pour $\int_0^x y\,dx$ une série dont le terme général de rang $q-i+1$ est:

$$a_i n^i \times \sum_{k=q}^{k=i+1} a_k n^k + \frac{(a_i-1)a_i}{2} N^i n^i + \frac{n-1}{2(N-1)} a_i n^i N^i$$

(en convenant évidemment que $\sum\limits_{k=i}^{k=i+1} a_k n^k = 0$ et $\sum\limits_{k=i}^{k=i} a_k n^k = 0$).

Ce terme général est la somme d'expressions positives, il est donc positif. On peut encore l'écrire:

$$a_i n^i \sum_{k=q}^{k=i+0} a_k n^k + \frac{a_i}{2}\left(a_i - \frac{N-n}{N-1}\right) n^i N^i.$$

On aura donc:

$$\int_0^x y\,dx = \sum_{i=q}^{i=-\infty} \left\{ \frac{a_i}{2}\left(a_i - \frac{N-n}{N-1}\right) n^i N^i + a_i n^i \sum_{k=q}^{k=i+1} a_k n^k \right\}.$$

Il est facile d'établir que la série du 2e membre est convergente. A cette fin, nous allons majorer le terme général en remplaçant tous les a_i ou a_k qui y figurent par $n-1$; il vient:

$$\frac{n-1}{2}\left(n-1-\frac{N-n}{N-1}\right) n^i N^i + (n-1) n^i \sum_{k=q}^{k=i+1} (n-1) n^k$$

ou encore:

$$\frac{n-1}{2} \times \frac{N(n-2)+1}{N-1} \times n^i N^i + (n-1)^2 n^i \sum_{k=q}^{k=i+1} n^k.$$

D'autre part $\sum\limits_{k=q}^{k=i+1} n^k < \sum\limits_{k=q}^{k=-\infty} n^k$: or cette dernière série, progression géométrique de raison <1, est convergente. Soit A sa somme, on majorera encore le terme général en remplaçant $\sum\limits_{k=q}^{k=i+1} n^k$ par A; on obtiendra ainsi la série:

$$\sum_{i=q}^{i=-\infty} \left\{ \frac{n-1}{2} \times \frac{N(n-2)+1}{N-1} \times n^i N^i + (n-1)^2 n^i A \right\}.$$

Or cette série est la somme terme à terme de deux progressions géométriques convergentes (de raisons <1):

$$\sum_{i=q}^{i=-\infty} \frac{n-1}{2} \times \frac{(n-2)N+1}{N-1} \times n^i N^i$$

et $\sum_{i=q}^{i=-\infty}(n-1)^2 n^i A$; elle sera donc convergente et la série trouvée pour $\int_0^x y\,dx$ le sera aussi *a fortiori*.

REMARQUES. 1°) Si le développement de x dans le système de base n est fini, le dernier terme étant $a_r n^r$, il suffira évidemment de calculer $\sum_{i=q}^{i=r}$, en faisant $a_{r-1} = a_{r-2} = \ldots = 0$.

2°) L'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} y\,dx$ s'obtient immédiatement par différence.

3°) Si dans la formule donnant $\int_0^x y\,dx$ on fait $N=n$, il vient:

$$\int_0^x y\,dx = \sum_{i=q}^{i=-\infty} \left\{ \frac{a_i^2}{2}(n^i)^2 + a_i n^i \sum_{k=q}^{k=i+1} a_k n^k \right\},$$

(en convenant toujours que $\sum_{k=i}^{k=i+1} a_k n^k = \sum_{k=i}^{k=i} a_k n^k = 0$), d'où:

$$\int_0^x y\,dx = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=q}^{i=-\infty} a_i n^i\right)^2 = \frac{1}{2}x^2.$$

On retrouve ainsi la formule élémentaire.