BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PACIFICO MAZZONI

Su una proprietà della vita matematica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 11 (1932), n.2, p. 84-85.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_84_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_84_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_84_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Su una proprietà della vita matematica.

Nota di PACIFICO MAZZONI (a Bari).

Sunto. - *L'A. ritorna su una proprietà della vita matematica, da lui dimostrata la prima volta, e della quale in seguito il prof. SIBIRANI dette un'altra dimostrazione più semplice.*

Il sig. ALIPRANDI, nella Nota: *Una proprietà della vita matematica*, pubblicata nel n. 1 (1932) del « Bollettino dell'U. M. I. », ha cercato di dare una dimostrazione più semplice del teorema: « *la derivata della vita matematica rispetto al saggio è sempre negativa* ». Però è incorso in una svista che infirma la sua dimostrazione.

La vita matematica n per un individuo di età x viene definita, nel campo continuo, dalla relazione

$$(1) \quad \int_0^n e^{-it} dt = \int_0^{\omega-x} \frac{l(x+t)}{l(x)} e^{-it} dt,$$

in cui i indica il tasso istantaneo d'interesse, ω l'età estrema, $l(x)$ la funzione di sopravvivenza. Considerando fissa la x , e ponendo per brevità $l(x+t) = \varphi(t)$, si ha dalla (1), derivando rispetto ad i , e tenendo presente che n è funzione di i :

$$(2) \quad - \int_0^n t e^{-it} dt + e^{-in} \cdot \frac{dn}{di} = - \int_0^{\omega-x} t \varphi(t) e^{-it} dt.$$

Invece l'ALIPRANDI dà la seguente espressione della derivata del primo membro della (1):

$$(3) \quad e^{-in} \cdot \frac{dn}{di},$$

venendo così a sostituire alla (2) la relazione

$$(4) \quad e^{-in} \cdot \frac{dn}{di} = - \int_0^{\omega-x} t\varphi(t)e^{-it} dt,$$

la quale evidentemente è incompatibile con la (2), e perciò non può ritenersi esatta.

Riteniamo che l'A. abbia inteso di derivare prima rispetto ad n , moltiplicando poi per $\frac{dn}{di}$; ma se si deriva il primo membro della (1) rispetto ad n , allora i va considerata come funzione di n , e si ottiene, seguendo questa via

$$\left[e^{-in} - \int_0^n te^{-it} dt \cdot \frac{di}{dn} \right] \cdot \frac{dn}{di},$$

da cui, semplificando, si ricade precisamente nel primo membro della (2). La (4) non è dunque valida.

Per dimostrare che $\frac{dn}{di}$ è negativa, la via più semplice è quella indicata dal SIBIRANI nella Nota inserita nel « Bollettino U. M. I. » (n. 2 del 1925), e non crediamo possa ulteriormente semplificarsi. Ci permettiamo di riassumerla in poche parole.

Dalla (2) si ha

$$e^{-in} \frac{dn}{di} = \int_0^n te^{-it} dt - \int_0^{\omega-x} t\varphi(t)e^{-it} dt,$$

da cui, tenendo presente che $\varphi(t)$ è < 1 , perchè $l(t)$ è sempre una funzione decrescente, e che evidentemente n è $< \omega - x$, si ha

$$(5) \quad e^{-in} \frac{dn}{di} = \int_0^n te^{-it} [1 - \varphi(t)] dt - \int_n^{\omega-x} t\varphi(t)e^{-it} dt.$$

Se nel primo integrale a t si sostituisce il suo massimo valore n , e nel secondo integrale a t si sostituisce il suo minimo valore n , si ottiene

$$\begin{aligned} e^{-in} \frac{dn}{di} &< n \left[\int_0^n e^{-it} [1 - \varphi(t)] dt - \int_n^{\omega-x} \varphi(t)e^{-it} dt \right] \\ &= n \left[\int_0^n e^{-it} dt - \int_0^{\omega-x} \varphi(t)e^{-it} dt \right]. \end{aligned}$$

La quantità tra le quadre è nulla per la (1), e dunque si ha $\frac{dn}{di} < 0$, c. d. d.