
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

EMMA SENIGAGLIA

Sulle asintotiche e sulle linee di Darboux delle superficie generiche dello spazio ordinario

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 11 (1932), n.2, p. 82-84.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_82_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_82_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

**Sulle asintotiche e sulle linee di Darboux
delle superficie generiche dello spazio ordinario.**

Nota di EMMA SENIGAGLIA (a Bologna).

Sunto. - *Si dimostra un teorema che permette di ottenere, conoscendo le asintotiche e una direzione di DARBOUX in un punto di una superficie generica dell' S_3 , le rimanenti direzioni di DARBOUX* ⁽¹⁾.

In un punto di una superficie generica dell' S_3 le *asintotiche* saranno distinte e saranno anche distinte fra loro le direzioni di DARBOUX ⁽²⁾.

È noto che tali direzioni hanno carattere proiettivo e che le coniugate armoniche rispetto alle asintotiche delle direzioni di DARBOUX sono dette direzioni di SEGRE ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Pubblicò questa breve Nota per suggerimento avuto dal compianto prof. G. VITALI, alla cui memoria mando il più riverente saluto.

⁽²⁾ Vedi G. FUBINI e CECIL, *Geometria proiettiva differenziale*, pp. 61-62. (Bologna, Zanichelli).

⁽³⁾ Loc. cit., p. 63.

Io mi propongo di dimostrare il seguente

TEOREMA. — Se p e q sono le direzioni asintotiche in un punto di una superficie generica dell' S_3 , se α, β, γ sono le direzioni di DARBOUX in detto punto, se γ' è la direzione di SEGRE corrispondente a γ , se r è la direzione che con p separa armonicamente la coppia γ', q , se s è quella che con q separa armonicamente la coppia γ', p , la coppia α, β separa armonicamente le coppie r, p ed s, q .

Di qui si ha un semplice modo di ottenere le direzioni α, β quando si conoscano le direzioni p, q, γ .

Per la dimostrazione del precedente teorema, immagino che le linee coordinate u_1 e u_2 cui riferisco la superficie siano le asintotiche.

Allora queste saranno le $du_1 = 0$ e le $du_2 = 0$, ossia, ponendo $\lambda = \frac{du_1}{du_2}$, corrisponderanno rispettivamente a $\lambda = 0$ e a $\lambda = \infty$.

In tal caso, l'equazione delle direzioni di DARBOUX assume la forma

$$(1) \quad \lambda^3 = k \quad (1),$$

dove k è una conveniente funzione razionale dei simboli di CHRISTOFFEL di 2^a specie.

Siano α, β, γ , le radici di (1). Dovrà essere

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0,$$

da cui

$$(2) \quad \alpha + \beta = -\gamma,$$

$$(3) \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{\gamma}.$$

La direzione di SEGRE corrispondente alla γ sarà data da $\lambda = -\gamma$ ed evidentemente

$$(\infty, -\gamma; 0, -2\gamma) = \left(0, -\gamma; \frac{-\gamma}{2}, \infty\right) = -1,$$

perchè $-\gamma$ è la semisomma di 0 e -2γ e $\frac{-\gamma}{2}$ è la semisomma di 0 e $-\gamma$.

Resta a provare che

$$(\alpha, \beta; 0, -2\gamma) = -1,$$

ossia che

$$(4) \quad \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}; \infty, \frac{1}{-2\gamma}\right) = -1,$$

(4) Vedi G. FUBINI, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 40, (1913-1914), p. 798.

e che

$$(5) \quad \left(\alpha, \beta; \infty, \frac{-\gamma}{2} \right) = -1.$$

Ma ciò è evidente, perchè per la (3), $\frac{1}{-2\gamma}$ è la semisomma di $\frac{1}{\alpha}$ e $\frac{1}{\beta}$, e per la (2), $\frac{-\gamma}{2}$ è la semisomma di α e β .

È così dimostrato che α e β separano armonicamente le coppie $0, -2\gamma$ ed $\infty, \frac{-\gamma}{2}$, c. d. d.