BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI CAMPEDELLI

La bisezione delle serie lineari sopra
una curva di genere virtuale p e
genere effettivo $p - 1$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 11 (1932), n.2, p. 79–82.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_79_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_79_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1932.

La bisezione delle serie lineari sopra una curva di genere virtuale p e genere effettivo $p - 1$.

Nota di LUIGI CAMPEDELLI (in Roma).

Sunto. - *Sopra una curva C_p di genere p , è data una serie g_{2n}^{2n-p} , con $2n > 2p$, segata da un sistema lineare di curve φ : si considerano allora i 2^{2p} sistemi continui di φ n -tangenti a C_p , i quali determinano sulla C_p le g_n^{n-p} metà della g_{2n}^{2n-p} , e si studia come si comportano questi sistemi quando la C_p si fa variare con continuità fino a farle acquistare un punto doppio accidentale.*

1. Sia data una curva piana C_p , di genere p e di un certo ordine m , e sopra di essa si prenda una serie lineare non speciale g_{2n}^{2n-p} , con $2n > 2p$.

La C_p (supposto il suo ordine m abbastanza alto rispetto al genere p) fa parte di un sistema continuo Σ_p di curve piane irriducibili d'ordine m , con

$$d = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - p$$

punti doppi. Però in Σ_p sono contenute anche infinite curve C_{p-1} (costituenti un sistema continuo Σ_{p-1}) che hanno il genere $p - 1$, invece di p , possedendo $d + 1$ punti doppi: queste C_{p-1} , particolari di Σ_p , si dovranno riguardare come di *genere virtuale p* , ed il loro punto doppio che non proviene come limite da un punto doppio della C_p generica, si considererà come *punto doppio accidentale* da ritenersi *virtualmente inesistente*.

Se si fa variare con continuità la C_p in Σ_p , facendola tendere ad una C_{p-1} , con un *punto doppio accidentale* O , la g_{2n}^{2n-p} data sopra C_p , tende ad una serie lineare di C_{p-1} , ancora d'ordine $2n$ e dimensione $2n - p$, per la quale i due punti O_1 ed O_2 , di C_{p-1} , sovrapposti in O , costituiscono una *coppia neutra*; cosicchè tale serie sarà *virtualmente completa* sulla C_{p-1} di genere virtuale p ⁽¹⁾, mentre in effetto essa è contenuta in una g_{2n}^{2n-p+1} che non ha più quella coppia neutra.

Sopra la C_p la g_{2n}^{2n-p} possiede 2^{2p} serie lineari metà (in gene-

(1) Cfr., p. es., F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, (Bologna, Zanichelli, 1924), vol. III, libro V, cap. II, § 16, nota II.

rale non speciali) g_n^{n-p} (1), mentre la g_{2n}^{2n-p+1} di C_{p-1} , che contiene la g_{2n}^{2n-p} limite della data, dà luogo soltanto a 2^{2p-2} serie metà g_n^{n-p+1} ; d'altra parte sulla C_{p-1} di genere virtuale p , la g_{2n}^{2n-p} è virtualmente completa, e in questo senso le g_n^{n-p+1} non possono riguardarsi come sue serie metà. Si presenta così il problema di ricercare che cosa accada delle 2^{2p} serie metà della g_{2n}^{2n-p} di C_p , quando si passi al limite facendo tendere con continuità la C_p a C_{p-1} in Σ_p .

2. Per semplicità conviene considerare la g_{2n}^{2n-p} come segata su C_p dalle sue curve aggiunte φ_h , d'un conveniente ordine h ($h = m-3$) (passanti eventualmente per un certo gruppo K di punti fissi su C_p), le quali costituiranno un sistema lineare di dimensione

$$t = 2n - p + \frac{(h-m)(h-m+3)}{2} + 1.$$

Le φ_h si distribuiscono in 2^{2p} sistemi continui (non lineari) $|\varphi_h|$, ∞^{t-n} , di curve tangenti n volte alla C_p , ciascuno dei quali determina sopra la C_p , con i gruppi dei punti di contatto delle sue φ_h , una delle g_n^{n-p} metà della g_{2n}^{2n-p} .

Quando si passa dalla C_p alla C_{p-1} , il sistema delle φ_h ha come limite un sistema lineare, ancora ∞^t , non avente il punto O come punto base, costituito dalle φ_h virtualmente aggiunte alla C_{p-1} di genere virtuale p (passanti per il gruppo $\bar{K}$ limite su C_{p-1} del gruppo K di C_p). Quindi un sistema $|\varphi_h|$ di φ_h n -tangenti a C_p , tende ad un sistema $|\bar{\varphi}_h|$ costituito o da φ_h passanti per O e tangenti $n-1$ volte a C_{p-1} , oppure da $\bar{\varphi}_h$ ancora n -tangenti a C_{p-1} . Nel primo caso gli $n-1$ punti di contatto delle φ_h di $|\bar{\varphi}_h|$ danno su C_{p-1} i gruppi di una delle $2^{2(p-1)}$ serie lineari metà di quella segata su C_{p-1} dalle sue aggiunte effettive d'ordine h (passanti per $\bar{K}$), la quale non è altro che la serie residua di $O_1 + O_2$ rispetto alla g_{2n}^{2n-p+1} , completa (sulla C_{p-1} di genere $p-1$), che contiene la g_{2n}^{2n-p} segnata dal sistema lineare delle $\bar{\varphi}_h$.

È facile vedere che ogni siffatto sistema $|\bar{\varphi}_h|$ proviene, come limite, da due sistemi $|\varphi_h|$ di φ_h n -tangenti a C_p : infatti al tendere di C_p a C_{p-1} le φ_h passanti per O risultano limiti di due φ_h toccanti la C_p in due punti (la curva che passa per un punto doppio assorbendo due curve tangenti in un fascio).

Rimangono 2^{2p-1} sistemi continui $|\varphi_h|$, i quali, quando C_p tende a C_{p-1} , hanno come limite sistemi $|\bar{\varphi}_h|$ di φ_h non passanti per O .

(1) Cfr., p. es., ENRIQUES-CHISINI, op. cit., vol. III, libro V, cap. IV, § 35.

e n -tangenti a C_{p-1} : questi, con i punti di contatto delle loro curve, danno sulla C_{p-1} di genere virtuale p , delle g_n^{n-p} virtualmente complete rispetto alla coppia neutra (O_1, O_2) , le quali si devono considerare come serie metà della g_{2n}^{2n-p} , segata dal sistema lineare delle aggiunte virtuali $\bar{\varphi}_h$, e virtualmente completa rispetto alla coppia neutra (O_1, O_2) . Però se riguardiamo la C_{p-1} come di genere $p-1$, sopra di essa le precedenti g_n^{n-p} non sono più complete, e le g_n^{n-p+1} a cui appartengono danno delle serie metà della g_{2n}^{2n-p+1} completa che contiene la g_{2n}^{2n-p} : ma — l'abbiamo già osservato — la g_{2n}^{2n-p+1} ha soltanto 2^{2p-2} serie metà, quindi le 2^{2p-1} g_n^{n-p} non possono essere tutte disequivalenti, se pure sono tutte distinte!

Quello che accade in realtà è precisato dal teorema seguente:

Sopra la C_{p-1} , le suddette g_n^{n-p} , virtualmente complete, si distribuiscono in coppie di serie equivalenti, le serie di ciascuna coppia (generalmente distinte) essendo contenute in una medesima g_n^{n-p+1} completa.

Infatti data sulla C_{p-1} di genere $p-1$, una g_n^{n-p} con la coppia neutra (O_1, O_2) , si consideri la g_n^{n-p+1} completa che la contiene, ed entro questa si prenda una generica g_n^1 avente in comune con la g_n^{n-p} un (solo) gruppo G .

Nell'iperspazio S_{2n-p+1} a $2n-p+1$ dimensioni, con cui si identifica la g_{2n}^{2n-p+1} doppia della g_n^{n-p+1} , prendiamo il piano S_2 i cui punti rappresentano le coppie di gruppi della g_n^1 . L' S_2 interseca secondo un S_1 , l' S_{2n-p} che corrisponde ai gruppi della g_{2n}^{2n-p} virtualmente completa rispetto alla coppia neutra (O_1, O_2) . I punti di cotesto S_1 rappresentano ∞^1 coppie di gruppi della g_n^1 , costituenti un'involuzione razionale, in cui si hanno due coppie unite (in generale distinte), cioè due coppie ciascuna delle quali è costituita da un gruppo della g_n^1 contato due volte.

Uno dei due gruppi che formano queste coppie, è, evidentemente, il gruppo G , comune alla g_n^1 e alla g_n^{n-p+1} , da cui siamo partiti; l'altro è un gruppo G' , equivalente a G , i cui punti danno i contatti con C_{p-1} di una φ_h che non è contenuta nel sistema continuo ∞^{l-n} , $\{\varphi_h\}$, di φ_h n -tangenti a C_{p-1} , che determina la g_n^{n-p} a cui appartiene il gruppo G . Pertanto la φ_h che tocca la C_{p-1} nei punti di G' , fa parte di un secondo sistema continuo $\{\bar{\varphi}_h\}$, il quale con i gruppi dei punti di contatto delle sue curve dà sopra C_{p-1} una serie, pure d'ordine n e dimensioni $n-p$, virtualmente completa rispetto alla coppia neutra (O_1, O_2) , ed equivalente alla g_n^{n-p} predetta, ma distinta da essa.

3. Riepilogando le considerazioni svolte si ha:

Data sopra una curva C_p di genere p , una serie g_{2n}^{2n-p} , con $2n > 2p$, che sia segata da un sistema lineare $|\varphi_h|$ di curve aggiunte, si faccia tendere con continuità la C_p ad una C_{p-1} (di genere effettivo $p-1$ e genere virtuale p) con un punto doppio accidentale O . Allora il sistema $|\varphi_h|$ ha come limite un sistema lineare $|\bar{\varphi}_h|$, non avente come base il punto O ; e i 2^{2p} sistemi continui $|\varphi_h|$ di φ_h n -tangenti a C_p che, con i gruppi dei punti di contatto delle loro curve, determinano sulla C_p le serie g_n^{n-p} metà della g_{2n}^{2n-p} , tendono a:

1) 2^{2p-2} sistemi di $\bar{\varphi}_h$ $(n-1)$ -tangenti a C_{p-1} , passanti per O , ciascuno dei quali proviene come limite da due sistemi $|\varphi_h|$.

2) 2^{2p-1} sistemi di $\bar{\varphi}_h$ n -tangenti a C_{p-1} , non passanti per O , i quali danno sulla C_{p-1} altrettante serie lineari g_n^{n-p} , virtualmente complete rispetto alla coppia neutra (O_1, O_2) costituita dai due punti di C_{p-1} sovrapposti in O . Le g_n^{n-p} sono metà della g_{2n}^{2n-p} , pure virtualmente completa, segata su C_{p-1} da $|\bar{\varphi}_h|$: però sopra la C_{p-1} di genere effettivo $p-1$, esse non sono complete, essendo a coppie contenute in una g_n^{n-p+1} effettivamente completa.