
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

TULLIO VIOLA

Sul principio di approssimazione di B. Levi nella teoria della misura degli aggregati e in quella dell'integrale di Lebesgue

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **11** (1932), n.2, p. 74–78.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_74_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_74_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_74_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Sul principio di approssimazione di B. Levi nella teoria della misura degli aggregati e in quella dell'integrale di Lebesgue.

Nota di T. VIOLA (a Parigi).

Sunto. - *Si giustifica col principio di approssimazione di B. LEVI un teorema fondamentale della teoria della misura degli aggregati (secondo LEBESGUE).*

In una Nota precedente comparsa nel numero di Dicembre 1931 di questo « Bollettino » ho fatto alcune osservazioni sull'applicazione del postulato di E. ZERMELO e del principio di approssimazione di B. LEVI alla teoria degli aggregati di punti.

Mi propongo in questa seconda Nota di mostrare come il principio di approssimazione permetta di regolarizzare un teorema di fondamentale importanza nella teoria della misura degli aggregati (secondo LEBESGUE), ma controverso appunto perchè si dimostra facendo uso del postulato della scelta.

1. Il teorema che ci proponiamo di regolarizzare è il seguente:
La somma d'una infinità numerabile di aggregati misurabili, non aventi due a due nessun punto in comune, è un aggregato misura-

bile e la sua misura è la somma delle misure dei singoli aggregati addendi ⁽¹⁾.

Vogliamo dimostrare che il principio di approssimazione permette di affermare tale teorema in un ampliamento naturale del dominio deduttivo Ω dei numeri reali.

Siano $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n, \dots$ i detti aggregati misurabili, contenuti tutti in un medesimo intervallo $a - b$. Rinchiodiamo $\mathcal{E}_1$ in una successione S_1 d'intervalli α_{1i} ($i=1, 2, \dots$) esterni l'uno all'altro (cioè non aventi in comune punti nè interni nè estremi), e tali che ⁽²⁾

$$(1) \quad m(S_1) \leq m(\mathcal{E}_1) + \frac{\varepsilon}{2},$$

essendo ε positivo prefissato ad arbitrio: ciò è possibile per l'ipotesi della misurabilità di $\mathcal{E}_1$.

Indichiamo con $\mathcal{E}_2^*$ l'aggregato $S_1 + \mathcal{E}_2$, cioè l'aggregato di tutti i punti che appartengono ad $\mathcal{E}_2$ o ad S_1 (come interni o come estremi) o ad entrambi. Rinchiodiamo $\mathcal{E}_2^*$ in una successione S_2 d'intervalli α_{2i} ($i=1, 2, \dots$) esterni l'uno all'altro, e tali che

$$(2) \quad m(S_2) \leq m(S_1) + m(\mathcal{E}_2) + \frac{\varepsilon}{4} \leq m(\mathcal{E}_1) + m(\mathcal{E}_2) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Così proseguiamo indefinitamente. In generale, essendosi determinata la successione S_{r-1} d'intervalli α_{r-1i} ($i=1, 2, \dots$), si porrà $\mathcal{E}_r^* = S_{r-1} + \mathcal{E}_r$ e si rinchioderà $\mathcal{E}_r^*$ in una successione S_r d'intervalli α_{ri} ($i=1, 2, \dots$) esterni l'uno all'altro, e tali che

$$(3) \quad m(S_r) \leq m(S_{r-1}) + m(\mathcal{E}_r) + \frac{\varepsilon}{2^r} \leq \sum_{i=1}^r m(\mathcal{E}_i) + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^r}\right).$$

Un intervallo qualunque α_{ri} , appartenente a un qualunque S_r , è contenuto intieramente in uno ed un solo ben determinato α_{r+1j} di S_{r+1} , questo a sua volta in uno α_{r+2k} di S_{r+2} , e così via. Gli estremi sinistri degli intervalli $\alpha_{ri}, \alpha_{r+1j}, \alpha_{r+2k}, \dots$ si susseguono ordinatamente dalla destra verso la sinistra ed hanno quindi un limite inferiore u , gli estremi destri si susseguono ordinatamente dalla sinistra verso la destra ed hanno quindi un limite superiore v . Ciò può ripetersi per ogni α_{ri} permettendoci di definire la successione S' (che potrebbe chiamarsi il « limite » della successione di successioni $S_1, S_2, \dots$) di tutti gl'intervalli come $u - v$.

⁽¹⁾ H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*. Paris, Gauthier-Villars, 1928, pag. 115.

⁽²⁾ Indichiamo in generale con $m(\mathcal{A})$ la misura di un aggregato misurabile $\mathcal{A}$.

Può darsi che i segmenti di S' non siano tutti esterni l'uno all'altro, potendo a due a due essere contigui. In tal caso riuniamo fra loro i segmenti contigui in segmenti unici. Potrà pure darsi che, dopo aver eseguita questa operazione, si sia ottenuta una successione S'' d'intervalli tale che l'aggregato perfetto complementare abbia misura nulla in qualche parte r -s di a - b .

In tal caso sostituiamo al gruppo d'intervalli di S'' contenuti entro r -s l'intervallo totale r -s. Otteniamo così infine una successione d'intervalli, tutti esterni l'uno all'altro e tali che l'aggregato perfetto complementare non ha misura nulla in nessuna parte di a - b . Chiameremo S questa successione.

Si ha immediatamente da quanto precede

$$m(S) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(\mathcal{G}_i) + \varepsilon.$$

La successione S dipende da infinite scelte arbitrarie. Siano S' ed S'' due di tali successioni e sia $\mathcal{T}$ l'aggregato di tutti i punti che appartengono, come interni o come estremi, all'una od all'altra, ma non ad entrambe. Poniamo $d(S', S'') = m(\mathcal{T})$. L'aggregato $\mathcal{T}$ è un aggregato misurabile che, ove esista, non può aver misura nulla in nessuna parte di a - b ⁽¹⁾. Ne segue che la condizione $d(S', S'') = 0$ è necessaria e sufficiente affinché sia $S' = S''$. Inoltre, se S' ed S'' sono due successioni definite come S operando le stesse prime r scelte, cioè a partire dalle stesse prime r successioni $S_1, S_2, \dots, S_r$, è

$$(4) \quad m(S') - m(S_r) \leq \sum_{i=r+1}^{\infty} m(\mathcal{G}_i) + \frac{\varepsilon}{2^r},$$

$$(5) \quad m(S'') - m(S_r) \leq \sum_{i=r+1}^{\infty} m(\mathcal{G}_i) + \frac{\varepsilon}{2^r}.$$

e quindi

$$(6) \quad d(S', S'') \leq 2 \sum_{i=r+1}^{\infty} m(\mathcal{G}_i) + \frac{\varepsilon}{2^{r-1}}.$$

Assegnato ad arbitrio un numero positivo δ , basta prendere r , tale che sia

$$(7) \quad \frac{\varepsilon}{2^{r-1}} < \delta,$$

⁽¹⁾ Infatti, supposto che $\mathcal{T}$ esista, sia P un punto di $\mathcal{T}$. P è interno od estremo ad un intervallo ω dell'una delle due successioni S' , S'' , ma è esterno a tutti gl'intervalli dell'altra. In entrambi i casi esistono altri punti di ω che appartengono a $\mathcal{T}$. Tutti i punti di $\mathcal{T}$ che appartengono ad ω costituiscono un aggregato che ha misura > 0 . $\mathcal{T}$ è costituito da un numero finito o un'infinità numerabile di tali aggregati esterni l'uno all'altro.

r_2 tale che sia

$$\sum_{i=r_2+1}^{\infty} m(\mathcal{E}_i) < \frac{\delta}{4},$$

ed $r \geq r_1, r_2$; allora sarà $d(S', S'') < \delta$. Ciò prova che una qualunque successione S appartiene all'ampliamento naturale del dominio deduttivo Ω dei numeri reali definito dalla funzione $d(S', S'')$.

Ma v'è di più. Il principio di approssimazione appare qui pienamente accettabile, conformemente a quanto si è detto al n. 5 della Nota precedente: *può veramente dirsi che una qualunque successione S è determinata « con sufficiente approssimazione » da un numero finito di scelte arbitrarie.* Infatti, assegnato ad arbitrio un numero positivo δ , scegliamo r , analogamente a quanto si è fatto sopra, per modo che sia

$$(8) \quad \sum_{i=r+1}^{\infty} m(\mathcal{E}_i) + \frac{\varepsilon}{2^r} < \delta.$$

Allora è $m(S_r) \geq m(S) - \delta$. Dopo le prime r scelte arbitrarie, pur non conoscendo i singoli segmenti di S , se ne conoscono tuttavia delle parti: quelle parti che non sono ancora determinate restano tutte contenute entro $a \overline{b}$, ma tutte esterne ai segmenti di S_r e di misura complessiva minore di δ .

2. Ogni aggregato $\mathcal{E}_r$ è contenuto in ciascuna delle successioni $S_r, S_{r+1}, S_{r+2}, \dots$. Dunque la somma $\mathcal{E}$ degli aggregati $\mathcal{E}_r$ è contenuta in S e perciò

$$m_r(\mathcal{E}) \leq m(S) \leq \sum_{r=1}^{\infty} m(\mathcal{E}_r) + \varepsilon,$$

e, per l'arbitrarietà di ε ,

$$(1) \quad m_r(\mathcal{E}) \leq \sum_{r=1}^{\infty} m(\mathcal{E}_r).$$

Indichiamo ora con $C_{ab}(\mathcal{E})$ l'aggregato complementare di $\mathcal{E}$ rispetto ad $a \overline{b}$, cioè l'aggregato costituito da tutti i punti di $a \overline{b}$ che non appartengono a nessun $\mathcal{E}_r$ ($r=1, 2, \dots$). Vogliamo dimostrare la disuguaglianza

$$(2) \quad m_r[C_{ab}(\mathcal{E})] \leq m(a \overline{b}) - \sum_{r=1}^{\infty} m(\mathcal{E}_r).$$

Basterà dimostrare che, assegnato un numero positivo arbitrario η , è

$$m_r[C_{ab}(\mathcal{E})] < m(a \overline{b}) - \sum_{r=1}^{\infty} m(\mathcal{E}_r) + \eta.$$

A tal uopo, indichiamo con k il più piccolo intero tale che

$$\sum_{r=1}^k m(\mathcal{E}_r) > \sum_{r=1}^{\infty} m(\mathcal{E}_r) - \frac{\eta}{2}.$$

L'aggregato

$$\bar{\mathcal{E}}_k = a - b - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \dots - \mathcal{E}_k$$

è misurabile perchè differenza di un numero finito di aggregati misurabili e contiene evidentemente $C_{ab}(\mathcal{E})$. È

$$m(\bar{\mathcal{E}}_k) = m(a - b) - \sum_{r=1}^k m(\mathcal{E}_r) < m(a - b) - \sum_{r=1}^{\infty} m(\mathcal{E}_r) + \frac{\eta}{2}.$$

Rinchiudiamo $\bar{\mathcal{E}}_k$ in una successione d'intervalli

$$\beta_{k1}, \beta_{k2}, \dots, \beta_{ki}, \dots$$

tali che

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(\beta_{ki}) < m(\bar{\mathcal{E}}_k) + \frac{\eta}{2}.$$

Anche $C_{ab}(\mathcal{E})$ resta rinchiuso nei medesimi, dunque

$$m_e[C_{ab}(\mathcal{E})] \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(\beta_{ki}) < m(\bar{\mathcal{E}}_k) + \frac{\eta}{2} < m(a - b) - \sum_{r=1}^{\infty} m(\mathcal{E}_r) + \eta.$$

Dimostrata così la (2), si ottiene immediatamente

$$m(a - b) - m_e[C_{ab}(\mathcal{E})] \geq \sum_{r=1}^{\infty} m(\mathcal{E}_r),$$

$$m_e(\mathcal{E}) \geq \sum_{r=1}^{\infty} m(\mathcal{E}_r),$$

e dal confronto con la (1) segue che $\mathcal{E}$ è misurabile e che è precisamente

$$m(\mathcal{E}) = \sum_{r=1}^{\infty} m(\mathcal{E}_r), \quad \text{c. d. d.}$$

3. La dimostrazione dei n.° 1, 2 sembra semplificare notevolmente, in certi particolari, quella del LEBESGUE. Non è infatti necessario considerare, come nella dimostrazione del LEBESGUE, una successione di successioni d'intervalli β_i racchiudenti ciascuna l'aggregato $C_{ab}(\mathcal{E}_i)$, e tanto meno quindi definire le successioni d'intervalli che in quella dimostrazione sono indicate con α'_i, β'_i .

La semplificazione introdotta ha poi il vantaggio di eliminare completamente il postulato della scelta dalla seconda parte della dimostrazione.