Bollettino Unione Matematica Italiana

Salvatore Pincherle

Un'applicazione del metodo simbolico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.2, p. 72–74.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_72_0>

Un'applicazione del metodo simbolico.

Nota di Salvatore Pincherle (a Bologna).

Sunto. - *Giovandosi dell'identità fra due sviluppi in serie di potenze, si dà una relazione simbolica notevole fra due espressioni di un operatore differenziale lineare d'ordine infinito.*

1. Si confrontino, astraendo qui da considerazioni ovvie di convergenza, i due sviluppi:

$$(1) \qquad (1+z)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$$

e

$$(2) \qquad (1+z)^s = e^{s\log(1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \log^n(1+z)\cdot s^n.$$

Nel secondo, possiamo sviluppare il coefficiente di s^n, $\frac{1}{n!}\log^n(1+z)$, per le potenze di z; si ponga

$$(3) \qquad \frac{1}{n!}\log^n(1+z) = q_{n\cdot n} z^n + q_{n+1\cdot n} z^{n+1} + q_{n+2\cdot n} z^{n+2} + \ldots;$$

sostituendo in (2) e ordinando per le potenze di z, si ottiene:

$$(4) \qquad (1+z)^s = \Sigma\,(q_{n\cdot n}s^n + q_{n-1\cdot n}s^{n-1} + q_{n-2\cdot n}s^{n-2} + \ldots + b_{1\cdot n}s) z^n.$$

Confrontando con (1), si ottiene lo sviluppo del fattoriale $\binom{s}{n}$ in polinomio ordinato per le potenze di s:

$$(5) \qquad \binom{s}{n} = q_{n\cdot n}s^n + q_{n-1\cdot n}s^{n-1} + q_{n-2\cdot n}s^{n-2} + \ldots + q_{1\cdot n}s.$$

Si vede quindi come i numeri $q_{n\cdot \nu}$ non siano altro che i noti coefficienti di fattoriali, fra i quali passa la relazione ricorrente, che si deduce subito dall'essere $\binom{s}{n+1} = \binom{s}{n}\frac{s-n}{n+1}$:

$$(6) \qquad q_{\nu\cdot n+1} = \frac{1}{n+1}\,(q_{\nu-1\cdot n} - nq_{\nu\cdot n}),$$

2. Da quanto precede, è facile dedurre l'espressione dei prodotti x^nD^n [1] in funzione delle potenze dell'operatore xD, che si

[1] *D è il solito simbolo dell'operazione di derivazione.*

indicherà per brevità con E. Si ponga infatti

(7) $$x^n D^n = g_{n\cdot n}E^n + g_{n-1\cdot n}E^{n-1} + g_{n-2\cdot n}E^{n-2} + \dots + g_{1\cdot n}E,$$

Applicando le operazioni espresse dai due membri della (7) alla funzione x^s, viene

(8) $$s(s-1)\dots(s-n+1) = g_{n\cdot n}s^n + g_{n-1\cdot n}s^{n-1} + \dots + g_{1\cdot n}s,$$

onde si vede che è:

$$g_{n\cdot n} = n!\,q_{n\cdot n},\ g_{n-1\cdot n} = n!\,q_{n-1\cdot n}, \dots\ g_{1\cdot n} = n!\,q_{1\cdot n},$$

e quindi si ha:

(9) $$\frac{1}{n!}x^n D^n = q_{n\cdot n}E^n + q_{n-1\cdot n}E^{n-1} + q_{n-2\cdot n}E^{n-2} + \dots + q_{1\cdot n}E.$$

3. Un operatore differenziale lineare d'ordine infinito, della forma

(10) $$H = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n D^n$$

può, per la (9), trasformarsi in una serie di potenze dell'operatore E; si ha:

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(q_{n\cdot n}E^n + q_{n-1\cdot n}E^{n-1} + \dots + q_{1\cdot n}E)$$

ossia

(11) $$H = \Sigma\, e_n E^n,$$

con

(12) $$e_n = a_n q_{n\cdot n} + a_{n+1}q_{n+1\cdot n} + a_{n+2}q_{n+2\cdot n} + \dots.$$

Paragonando collo sviluppo (3) di $\frac{1}{n!}\log^n(1+z)$, si nota come questo valga a fare conoscere le $q_{n\cdot n}$: pertanto, introducendo il simbolo a a rappresentare colla sua potenza a^n il termine a_n della successione dei coefficienti $a_0, a_1, \dots a_n, \dots$, le (12) si possono esprimere simbolicamente con

$$e_n = \frac{1}{n!}\log^n(1+a);$$

s'intende come ciò significhi che, dopo fatto lo sviluppo, a^n deve essere sostituito con a_n. La (11) può pertanto scriversi simbolicamente:

$$H = \Sigma \frac{1}{n!}\log^n(1+a)E^n,$$

ed anche

(13) $$H = e^{\log(1+a)E} = (1+a)^E.$$

D'altra parte, colla stessa convenzione, lo sviluppo (10) può scriversi simbolicamente

$$H = e^{axD},$$

e si ha perciò la relazione simbolica notevole fra le due espressioni dell'operatore H:

$$e^{axD} = (1 + a)^E. \tag{14}$$

Se nella (5) sostituiamo s col simbolo operativo E, viene

$$\frac{1}{n!} E(E-1) \dots (E-n+1) = q_n E^n + q_{n-1 \cdot n} E^{n-1} + \dots + q_{1 \cdot n} E, \tag{15}$$

dove, per la (9), il secondo membro non è altro che $\frac{1}{n!} x^n D^n$: da ciò l'uguaglianza

$$E(E-1) \dots (E-n+1) = x^n D^n, \tag{16}$$

che risulta pure dalla (14), ordinando ambo i membri per le potenze del simbolo a ed uguagliando i coefficienti corrispondenti.