
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FILIPPO SIBIRANI

Una questione relativa all'interpolazione lineare

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 11 (1932), n.2, p. 69–71.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_69_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_69_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1932.

Una questione relativa all'interpolazione lineare.

Nota di FILIPPO SIBIRANI (a Bologna).

Sunto. - *Si determina un caso in cui si può decidere se dia maggiore approssimazione l'interpolazione lineare od un'interpolazione iperbolica.*

Disponendo di due tavole di valori delle funzioni $f(x)$ e $\frac{1}{f(x)}$ per una successione di valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ della variabile indipendente, per ottenere un valore approssimato per $f(x')$, se x' soddisfa alla limitazione $x_h < x' < x_{h+1}$, si può interpolare linearmente la $f(x)$ fra x_h ed x_{h+1} ottenendo

$$(1) \quad f(x_h) + \frac{x' - x_h}{x_{h+1} - x_h} \{ f(x_{h+1}) - f(x_h) \}$$

oppure, interpolare linearmente la funzione $\frac{1}{f(x)}$ pure fra x_h ed x_{h+1} , poi prendere il reciproco del valore trovato, ottenendo, in definitiva,

$$(2) \quad \frac{(x_{h+1} - x_h)f(x_h)f(x_{h+1}))}{(x' - x_h)f(x_h) + (x_{h+1} - x')f(x_{h+1})}.$$

Sarebbe interessante stabilire un criterio semplice per stabilire se si ottenga una maggiore approssimazione applicando la (1) oppure la (2) ⁽¹⁾.

B. TEDESCHI ha dimostrato ⁽²⁾ che se $f'(x)^2 - f(x)f''(x) > 0$ esiste un intorno $x' - \lambda < x' < x' + \lambda$ tale che se x_h, x_{h+1} sono due punti dell'intorno, la (1) dà maggiore approssimazione della (2) ed il contrario accade se $f'(x)^2 - f(x)f''(x) < 0$.

La questione posta a principio non è così risolta, perchè interessa conoscere quale dei due modi di interpolazione dia maggiore approssimazione quando — come nella pratica avviene — i valori di x_h, x_{h+1} sono dati, mentre non appare semplice determinare se nell'intorno di cui il TEDESCHI dimostra l'esistenza sia compreso un dato intervallo.

Senza risolvere la questione in generale, additiamo un caso in cui essa è pienamente risolta.

Supponiamo che nell'intervallo $x_h - x_{h+1}$, la $f(x)$ conservi lo stesso segno e le due curve $y = f(x)$, $y = \frac{1}{f(x)}$ volgano da bande opposte la concavità. Allora le due approssimazioni che si hanno se si usa la (1) oppure la (2) sono entrambe per difetto od entrambe per eccesso.

⁽¹⁾ Nella Matematica finanziaria, ad es., si usano tavole che danno, per un certo numero di valori di n e di i i valori delle due funzioni $\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ (valore attuale di una rendita unitaria immediata della durata di n anni al tasso i) e $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ (annualità costante atta ad ammortizzare in n anni il debito di 1 lira al tasso i) e così pure delle due funzioni $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ (montante della suddetta rendita) e $\frac{i}{(1+i)^n - 1}$ (prima quota di capitale estinto nel succitato ammortamento).

È chiaro che il valore dato da (2) è quello che si ottiene interpolando la $f(x)$ con la funzione interpolatrice $\frac{1}{a+bx}$.

⁽²⁾ Alcune considerazioni sulla interpolazione lineare in « Bollettino di Matematica », Firenze, 1931.

Siano le due approssimazioni entrambe per eccesso, il che avviene quando $y=f(x)$ volge in alto la concavità; gli errori in valore assoluto che si commettono usando della (1) o della (2) sono rispettivamente

$$\varepsilon_1 = f(x_h) + \frac{x' - x_h}{x_{h+1} - x_h} [f(x_{h+1}) - f(x_h)] - f(x')$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(x_{h+1} - x_h)f(x_h)f(x_{h+1}))}{(x' - x_h)f(x_h) + (x_{h+1} - x')f(x_{h+1})} - f(x').$$

La differenza $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ diviene, dopo qualche facile trasformazione,

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{(x' - x_h)(x_{h+1} - x')[f(x_{h+1}) - f(x_h)]^2}{(x_{h+1} - x_h)[(x_{h+1} - x')f(x_{h+1}) + (x' - x_h)f(x_h)]}$$

quantità che — escluso il caso privo di interesse $f(x_h) = f(x_{h+1})$ — è del segno di $f(x)$. È dunque $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ se $f(x) < 0$ ed $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ se $f(x) > 0$.

Le due approssimazioni siano entrambe per difetto, il che avviene se $y=f(x)$ volge in basso la concavità; gli errori in valore assoluto che si commettono usando della (1) o della (2) sono rispettivamente

$$\varepsilon'_1 = f(x') - f(x_h) - \frac{x' - x_h}{x_{h+1} - x_h} [f(x_{h+1}) - f(x_h)]$$

$$\varepsilon'_2 = f(x') - \frac{(x_{h+1} - x_h)f(x_h)f(x_{h+1}))}{(x' - x_h)f(x_h) + (x_{h+1} - x')f(x_{h+1})}.$$

La differenza

$$\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2 = - \frac{(x' - x_h)(x_{h+1} - x')[f(x_{h+1}) - f(x_h)]^2}{(x_{h+1} - x_h)[(x' - x_h)f(x_h) + (x_{h+1} - x')f(x_{h+1})]}$$

è del segno contrario a quello di $f(x)$. È dunque $\varepsilon'_1 < \varepsilon'_2$ se $f(x) > 0$ e $\varepsilon'_1 > \varepsilon'_2$ se $f(x) < 0$.

I risultati ottenuti si possono compendiare nell'enunciato seguente:

Se nell'intervallo $x_h \dots x_{h+1}$ la $f(x)$ conserva lo stesso segno e le due curve $y = f(x)$ e $y = \frac{1}{f(x)}$ volgono da bande opposte la concavità, si ha approssimazione maggiore usando la (1) se la concavità di $y = f(x)$ è rivolta verso l'asse delle x , o la (2) se la concavità è rivolta nel senso opposto.