# Bollettino Unione Matematica Italiana



Pietro Burgatti


## Intorno alle relazioni ricorrenti relative a certe equazioni lineari alle derivate parziali del second'ordine


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **11** (1932), n.2, p. 65–69.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_65_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1932.

# PICCOLE NOTE

## Intorno alle relazioni ricorrenti relative a certe equazioni lineari alle derivate parziali del second'ordine.

Nota di P. Burgatti (a Bologna).

**Sunto.** - *Si può pensare che fra le soluzioni* $U_n$ *di un'equazione lineare* $E_n(U_n) = 0$ *del second'ordine alle derivate parziali, ove il coefficiente di* $U_n$ *dipende da un numero* n *variabile per incrementi finiti, e quelle* $U_{n+1}$ *di* $E_{n+1}(U_{n+1}) = 0$, *esistano delle relazioni ricorrenti, come accade per le corrispondenti equazioni alle derivate ordinarie. Si dimostra che in massima ciò non è; ma si dà l'esempio di una particolare equazione che ammette una tale relazione e si fa qualche altra osservazione.*

**1.** Per le soluzioni dell'equazione differenziale

$$E_n(y) = y'' + Qy' + R_n y = 0,$$

ove $Q$ è funzione di $x$, e $R_n$ dipende, oltre che da $x$, da un numero $n$ variabile per incrementi finiti, esistono sempre delle relazioni ricorrenti [1] del tipo

$$f(x, n)y_n' + \varphi(x, n)y_n = ay_{n+1}.$$

Si potrebbe pensare che la stessa proprietà avesse luogo per le equazioni a derivate parziali della forma lineare

$$E_n(U) = \Delta U + a \times \text{grad } U + R_n U = 0. \tag{1}$$

Questo in massima non è vero. Non mi pare privo d'interesse il dimostrarlo, e in pari tempo di indicare una particolare equazione (1) che ammette una relazione ricorrente del tipo

$$v \times \text{grad } U_n - \varphi(P, n)U_n = aU_{n+1}, \tag{2}$$

intendendo per $U_{n+1}$ una soluzione di $E_{n+1}(U) = 0$.

[1] Vedi la mia Nota: *Di una classificazione delle equazioni lineari del second'ordine, ecc.*. « R. Acc. dei Lincei », 1932.

Considerando $E_n$ come un operatore, si ha ovviamente

$$E_{n+1} = E_n + (R_n - R_{n+1});$$

talchè si trae

$$E_{n+1}(\varphi U) = \Delta(\varphi U) + a \times (\varphi \operatorname{grad} U + U \operatorname{grad} \varphi) + R_n \varphi U + \\ + (R_n - R_{n+1})\varphi U;$$

e poichè questa $U$ (che si dovrebbe scrivere $U_n$) soddisfa alla (1); risulta

$$E_{n+1}(\varphi U) = [\Delta\varphi + a \times \operatorname{grad} \varphi + (R_n - R_{n+1})\varphi]U + \\ + 2 \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} U. \tag{3}$$

Parimenti si ha

$$E_{n+1}(v \times \operatorname{grad} U) = E_n(v \times \operatorname{grad} U) + (R_n - R_{n+1})(v \times \operatorname{grad} U). \tag{4}$$

Ma [1]

$$E_n(v \times \operatorname{grad} U) = v \times \Delta' \operatorname{grad} U + \operatorname{grad} U \times \Delta' v + 2\mathrm{I}_1\left(\frac{dP}{dv}\,\frac{d \operatorname{grad} U}{dP}\right) + \\ + a \times \left[K \frac{dv}{dP} \operatorname{grad} U + \frac{d \operatorname{grad} U}{dP} v\right] + R_n(v \times \operatorname{grad} U);$$

talchè usando l'equazione

$$\operatorname{grad} E_n(U) = \Delta' \operatorname{grad} U + K \frac{da}{dP} \operatorname{grad} U + \frac{d \operatorname{grad} U}{dP} a + \\ + R_n \operatorname{grad} U + U_n \operatorname{grad} R_n = 0$$

moltiplicata scalarmente per $v$, si trova

$$E_n(v \times \operatorname{grad} U) = \operatorname{grad} U \times \left[\Delta' v + \frac{dv}{dP} a - \frac{da}{dP} v\right] + 2\mathrm{I}_1\left(\frac{dv}{dP}\,\frac{d \operatorname{grad} U}{dP}\right) - \\ - U_n \operatorname{grad} R_n \times v;$$

espressione che va poi sostituita nella (4).

Ma nel termine

$$\mathrm{I}_1\left(\frac{dv}{dP}\,\frac{d \operatorname{grad} U}{dP}\right)$$

compariscono tutte le derivate seconde di $U$ che non si possono eliminare mediante la (1). Ne segue che l'espressione

$$E_{n+1}(v \times \operatorname{grad} U - \varphi U),$$

non è esprimibile linearmente mediante $U$ e grad $U$ soltanto, epperò non si può porre la condizione che sia *identicamente nulla* cotesta espressione; il che dimostra ciò che abbiamo affermato di sopra.

[1] Operiamo nello spazio ordinario, ma tutto vale anche nel piano e si potrebbe estendere a spazi superiori.

2. Solo nel caso che sia $v = P - O$ ($O$ punto fisso) cotesto invariante primo diventa

$$\mathrm{I}_1 \frac{d \operatorname{grad} U}{dP}, \quad \text{ossia} \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U,$$

e può essere eliminato per mezzo della (1).

Se si eseguisce questa eliminazione, si può dopo ciò porre la condizione

$$E_n[(P - O) \times \operatorname{grad} U - \varphi U] = 0\,;$$

il che equivale a identificare i secondi membri delle (3) e (4). Si trova il sistema

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} 2 \operatorname{grad} \varphi = -\,a - \dfrac{da}{dP}(P - O) + (R_n - R_{n+1})(P - O), \\ \Delta\varphi + a \times \operatorname{grad}\varphi + (R_n - R_{n+1})\varphi = -\operatorname{grad} R_n \times (P - O) - 2R_n. \end{cases}$$

Se questo sistema per particolari espressioni di $a$ e di $R_n$ diventa integrabile, si avranno in corrispondenza ad esse delle equazioni della forma (1) che ammettono la relazione ricorrente

$$(\mathrm{II}) \qquad (P - O) \times \operatorname{grad} U_n - \varphi U_n = a U_{n+1} \qquad (a = \text{cost}).$$

Qui mi limito a un caso molto particolare; suppongo $a$ costante (diversa da zero) e $\varphi = c_n$ dipendente solo da $n$. Le (I) diventano

$$(\mathrm{I}') \quad \begin{aligned} a &= (R_n - R_{n+1})(P - O), \\ \operatorname{grad} R_n \times (P - O) + 2R_n &= -\,c_n(R_n - R_{n+1}). \end{aligned}$$

Ma essendo

$$P - O = r \operatorname{grad} r, \qquad (r = \operatorname{mod}(P - O))$$

il primo membro di quest'ultima si scrive

$$(r \operatorname{grad} R_n + 2R_n \operatorname{grad} r) \times \operatorname{grad} r\,;$$

perciò moltiplicando ambo i membri dell'equazione in discorso per $r \operatorname{grad} r$ risulta

$$[\operatorname{grad}(r^2 R_n) \times \operatorname{grad} r] \operatorname{grad} r = -\,c_n(R_n - R_{n+1}) r \operatorname{grad} r,$$

ossia per la prima delle (I')

$$\frac{\partial(r^2 R_n)}{\partial r} \operatorname{grad} r = -\,c_n a.$$

Questa è verificata da

$$r^2 R_n = -\,c_n a \times (P - O).$$

Ne segue

$$R_{n+1} - R_n = (c_n - c_{n+1}) \frac{a \times (P - O)}{r^2}\,;$$

talchè moltiplicando la prima delle (5) scalarmente per $P - O$ e sostituendo si trova

$$a \times (P - O) = (c_n - c_{n+3}) a \times (P - O).$$

Bisogna dunque prendere $c_n - c_{n+1} = -1$, ossia $c_n = -n$. Si conclude pertanto che *l'equazione*

$$\text{(III)} \qquad \Delta U + a \times \operatorname{grad} U + n \frac{a \times (P - O)}{r^2} U = 0,$$

*ove $a$ è costante, ammette la relazione ricorrente*

$$(P - O) \times \operatorname{grad} U_n + n U_n = a_n U_{n+1}.$$

Credo che sia questo il primo esempio d'una relazione ricorrente fra le soluzioni di una equazione alle derivate parziali del tipo (1).

**3.** È noto che una soluzione della (III) risulta univocamente determinata dai suoi valori sopra a una superficie chiusa $(\sigma)$ qualora in tutti i punti di $(\sigma)$ sia $a \times (P - O) < 0$ [1].

Ma a parte questo, presa una $U_n$ regolare in un certo campo e soddisfacente alla (III), tracciamo nel campo una sfera $(\sigma)$ di centro $O$ e raggio $\rho$. Poi supponiamo che nella relazione ricorrente si possa determinare la costante $a_n$ in guisa che la $U_{n+1}$ sia precisamente la stessa $U_n$ cambiato $n$ in $n + 1$.

[1] Si dimostra in due parole. Se ce ne fossero due $U_1$ e $U_2$, la differenza $\theta = U_1 - U_2$ sarebbe nulla su $(\sigma)$ e verificherebbe l'equazione data. Allora dalla identità

$$\operatorname{div} [\theta(\operatorname{grad} \theta + \theta a)] = - c\theta^2 + (\operatorname{grad} \theta)^2 + \theta \operatorname{grad} \theta \times a,$$

ove $c$ è il coefficiente di $U$ nell'equazione, si deduce, integrando entro $(\sigma)$ e applicando il teorema della divergenza

$$-\int_\sigma \theta (\operatorname{grad} \theta + \theta a) \times n\, d\sigma = \int_S [(\operatorname{grad} \theta)^2 + \theta \operatorname{grad} \theta \times a - c\theta^2] dS.$$

Ma $\theta = 0$ su $(\sigma)$ e

$$\theta \operatorname{grad} \theta \times a = \operatorname{div} \left( \frac{\theta^2}{2} a \right);$$

talchè trasformando anche qui col teorema della divergenza viene zero ($\theta = 0$ su $(\sigma)$), e resta

$$\int_S [(\operatorname{grad} A)^2 - c\theta^2] dS = 0,$$

che non è possibile se $c$ è negativo.

La relazione ricorrente si scrive

$$\operatorname{div}((P-O)U_n)+(n-3)U_n=a_n U_{n+1},$$

talchè integrando entro la sfera e applicando il teorema della divergenza viene

$$\rho\int_\sigma U_n d\sigma+(n-3)\int_S U_n dS=a_n\int_S U_{n+1}dS;$$

o meglio, dividendo per $\frac{4}{3}\pi\rho^3$,

$$3\cdot\frac{1}{4\pi\rho^2}\int_\sigma U_n d\sigma+(n-3)\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\int_S U_n dS=a_n\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\int_S U_{n+1}dS$$

che scriveremo

$$3[U_n]_\sigma+(n-3)[U_n]_S=a_n[U_{n+1}]_S,$$

ove questi simboli rappresentano i valori medi delle funzioni sulla $(\sigma)$ e entro $(\sigma)$ (cioè in $S$). È una relazione notevole, che per $n=3$ ha la particolarità di ridursi a

$$3[U_3]_\sigma=a_3[U_4]_S.$$

Si può esprimere la media volumetrica $[U_n]_S$ per mezzo delle medie superficiali delle $U_3$, $U_4$ ... $U_{n-1}$. Si trova infatti

$$a_{n-1}[U_n]_S=3\left\{[U_3]_\sigma+a_3[U_4]_\sigma+\frac{a_3a_4}{1\cdot 2}[U_5]_\sigma+\dots\right\},\qquad (n>3).$$