Bollettino
Unione Matematica
Italiana

UMI

Corrispondenza

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **11** (1932), n.2, p. 114–116.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1932_1_11_2_114_0>

CORRISPONDENZA

DOMANDE

52. Si desidera conoscere la soluzione generale dell'equazione alle differenze

$$(f(n+1)-f(n))^2-hf(n+1)-f(n)=k,$$

dove h e k sono costanti. *p. b.*

53. In una importante questione d'idrodinamica si presenta l'equazione differenziale

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(2-y)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{d^3y}{dx^3}-\varepsilon=0 \quad (\varepsilon=\text{costante}>0) \tag{1}$$

con le condizioni *ai limiti*

$$y(0)=0, \quad y(1)=0, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}=0. \tag{2}$$

Si domanda se della (1) esistano soluzioni, le quali siano compatibili con le condizioni (2). *c.*

RISPOSTE

50. Or sono molti anni, nel 1910 forse, il dott. GAETANO TAZZARI, allora professore nel R. L. Umberto I di Palermo e direttore del noto giornale « Il Pitagora », che più non si pubblica, mi mostrò a casa sua un volumetto manoscritto sui poligoni stellati. Data la brevità del tempo ch'io l'esaminai, non ricordo se contenesse novità notevoli o fosse già una monografia, con notizie storico-bibliografiche, che d'altre differisse per l'esposizione e per l'unione a vincolo delle varie parti.

Molti trattati di Geometria elementare, come, ad esempio, quello dell'AMIOT, di G. Z. REGGIO (G. B. Paravia) contengono considerazioni e parecchie proprietà classiche dei poligoni stellati.

Per novità recenti su codesti poligoni, vedi: V. G. CAVALLARO, *Un nuovo solido*, « Bollettino di Matematica », n.[i] 4-5-6-7, 1920 (6 pagine e 2 figure); *Su una nuova classificazione dei poligoni regolari stellati*. « Bollettino di Matematica », 1928 (16 pagine e 4 figure).

V. G. CAVALLARO

51. Detto z' un punto del piano complesso, interno alla striscia limitata dalle rette $y = \pi$, $y = -\pi$, descriviamo un cerchio col centro in z' e raggio r, talé che il cerchio tagli i lati della striscia in A, B e C, D rispettivamente. Sia c il contorno formato dagli archi di cerchio $\widehat{BC}$ e $\widehat{DA}$ e dai segmenti AB, CD; e valutiamo l'integrale della funzione

$$f(z) = \frac{\cos(\lambda z + m)}{\operatorname{ch} z' - \operatorname{ch} z},$$

($z = x + iy$, e m costanti reali qualunque), esteso ad esso ([1]).

Entro c la f ammette soltanto i due poli $z = z'$ e $z = -z'$, con i residui rispettivi

$$\frac{\cos(\lambda z' + m)}{-\operatorname{sh} z'} \quad \text{e} \quad \frac{\cos(m - \lambda z')}{\operatorname{sh} z'}.$$

La loro somma è

$$2\frac{\sin m \sin(\lambda z')}{\operatorname{sh} z'},$$

quindi, pel teorema di CAUCHY, sarà

$$(1) \qquad 2\frac{\sin m \sin(\lambda z')}{\operatorname{sh} z'} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\cos(\lambda z + m)}{\operatorname{ch} z' - \operatorname{ch} z}\, dz.$$

Scindiamo il contorno c nei suoi tratti AB, BC, CD, DA e consideriamo dapprima i due integrali relativi agli archi $\widehat{BC}$ e $\widehat{DA}$.

Si vede subito che il modulo di $(z - z')\, f(z)$ tende a zero quando $|z - z'|$ tende all'infinito, e poichè i due archi si mantengono co-

([1]) Questo procedimento è identico a quello seguito da A. PALATINI: (*Sulla influenza del fondo nella propagazione delle onde dovute a perturbazioni locali*. « Rend. Circ. Mat. di Palermo », T. XXXIX, p. 12, 1915), per ricavare una notevole formula sugli integrali di variabile complessa. La quale esprime il valore assunto da una funzione $f(z)$ in un punto z' interno ad una generica striscia del piano complesso, mediante i valori della parte reale di f al contorno della striscia medesima.

Anzi, la relazione in questione potrebbe dimostrarsi mediante la formula del PALATINI, scegliendo opportunamente la $f(z)$.

stantemente di lunghezza finita, il modulo dei due integrali relativi agli archi considerati tende pure a zero, per $r \to \infty$.

Inoltre su AB e CD si ha rispettivamente $z = x + i\pi$; $z = x - i\pi$ per cui, tenuto conto del senso di percorrenza sul contorno, si avrà

$$\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} \frac{\cos\{(\lambda x + m) + i\lambda\pi\}}{\operatorname{ch} z' - \operatorname{ch}(x + i\pi)} dx = -$$

$$-\int_{BA} \frac{\cos(\lambda x + m)\operatorname{ch}(\lambda\pi) - i\sin(\lambda x + m)\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\operatorname{ch} z' + \operatorname{ch} x} dx;$$

$$\int_{CD} f(z)dz = \int_{CD} \frac{\cos\{(\lambda x + m) - i\lambda\pi\}}{\operatorname{ch} z' - \operatorname{ch}(x - i\pi)} dx =$$

$$= \int_{CD} \frac{\cos(\lambda x + m)\operatorname{ch}(\lambda\pi) + i\sin(\lambda x + m)\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\operatorname{ch} z' + \operatorname{ch} x} dx.$$

Facendo crescere nella (1) r indefinitamente, sarà

$$\sin m \frac{\sin(\lambda z')}{\operatorname{sh} z'} = \frac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\lambda x + m)}{\operatorname{ch} z' + \operatorname{ch} x} dx.$$

Supposto che z' sia sull'asse imaginario, cioè che sia $z' = iy$, avremo

$$\sin m \frac{\operatorname{sh}(\lambda y)}{\operatorname{sh}(\lambda\pi)} = \frac{\sin y}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\lambda x + m)}{\operatorname{ch} x + \cos y} dx$$

e questa, con facili trasformazioni, può ridursi alla forma enunciata.

GIULIO LENZI.